MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

61. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 26. NOVEMBER 1954)

QA1
M88
v.61
no.2

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

61. Band — **Inhalt** — 2. Heft

Seite

Gaier, D., Über Interpolation in regelmäßig verteilten Punkten mit Nebenbedingungen 119
Laugwitz, D., Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. II 134
Rosenberg, A., Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linear transformations 150
Schütte, K., Ein widerspruchsloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage 160
Kanold, H.-J., Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen 180
Bagemihl, F., and W. Seidel, Some boundary properties of analytic functions . 186
Künzi, H. P., Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet 200
Stoll, W., Über meromorphe Modifikationen. I 206

not acc,
QA1
M88
v.61
no.2

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 119—133 (1954)

Über Interpolation in regelmäßig verteilten Punkten mit Nebenbedingungen*).

Von
DIETER GAIER.

1. Einleitung. Vorgegeben sei eine (im folgenden meist analytische) geschlossene JORDAN-Kurve C in der komplexen z-Ebene, und D bezeichne ihr Inneres. Die vorläufig beliebige komplexwertige Funktion $f(z)$ sei für $z \in C$ erklärt, und $\{G_n\}$ sei eine Folge von Gruppen regelmäßig verteilter Interpolationspunkte z_{nk}, die sämtlich auf C gelegen sind:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} G_1 : z_{11}, \\ G_2 : z_{21}, z_{22}, \\ \dots \\ G_n : z_{n1}, z_{n2}, \dots, z_{nn}, \\ \dots \end{cases}$$

Auf C regelmäßig verteilte Punktgruppen wurden von FEJÉR [3] eingeführt und sind wie folgt erklärt. Man bilde das Äußere von C durch die analytische Funktion

$$(1.2) \qquad z = \psi(w) = c\,w + c_0 + \frac{c_1}{w} + \cdots \qquad (c \neq 0)$$

eineindeutig auf $|w| > 1$ ab, wobei $z = \infty$ und $w = \infty$ einander entsprechen; $|c|$ ist die Kapazität von C. Die Abbildungsfunktion $z = \psi(w)$ ist bei Annäherung an $|w| = 1$ noch stetig, kann also für $w = w_{nk} = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ erklärt werden, und man wähle nun für die Punkte (1.1) $z_{nk} = \psi(w_{nk})$.

Verschiedene Autoren (z. B. FEJÉR [3], WALSH [10], CURTISS [1]) haben in früheren Untersuchungen zu der Funktion $f(z)$ das eindeutige Polynom $L_n(z)$ vom Grade $\leq n-1$ gebildet, das $f(z)$ in den Punkten der Gruppe G_n interpoliert, und sodann das Verhalten der Folge $\{L_n(z)\}$ $(z \in D)$ für $n \to \infty$ studiert. In dieser Arbeit wollen wir nun Polynome $p_n(z)$ betrachten, die außer den Bedingungen $p_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$ noch gewisse an die Ableitung von $p_n(z)$ in den z_{nk} gestellte Forderungen erfüllen. Im folgenden ist also $p_n(z)$ das eindeutige Polynom vom Grade $\leq 2n-1$, das in den Punkten der Gruppe G_n den Bedingungen

$$(1.3) \qquad p_n(z_{nk}) = f(z_{nk}), \qquad p_n'(z_{nk}) = \alpha_{nk}$$

*) Diese Arbeit wurde mit Unterstützung der Office of Naval Research of the United States Government durchgeführt, während der Verfasser der Harvard-Universität (Cambridge/USA.) angehörte.

genügt, wobei die α_{nk} vorgegebene Zahlen sind, die unser Interpolationsverfahren bestimmen, und es soll das Verhalten von $\{p_n(z)\}$ für $n \to \infty$ untersucht werden.

Dreierlei Möglichkeiten für die Wahl der α_{nk} werden behandelt.

Wird von $f(z)$ lediglich eigentliche R-Integrierbarkeit auf C angenommen, so kann man $\alpha_{nk} = 0$ für alle n und k setzen, in Analogie zu einem Verfahren von JACKSON bei trigonometrischer Interpolation (JACKSON [7], ZYGMUND [12]). Wir lassen allgemeiner eine beliebige Folge

$$\alpha_{nk} = o\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad \text{gleichmäßig in } k,$$

zu und bezeichnen die so erhaltenen Interpolationspolynome mit $J_n(z)$. Sie konvergieren für $n \to \infty$ und $z \in D$ gegen

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1.4}$$

Zu einer zweiten Wahl der α_{nk} kommt man, falls $f(z)$ $(z \in C)$ stetige Randfunktion einer in D regulären Funktion $f(z)$ ist. Bezeichnet nämlich $T_n(z)$ das zu $f(z)$ $(z \in \overline{D})$ gehörige eindeutige TCHEBYCHEFFsche Polynom vom Grade $\leq 2n-1$, so nehme man $\alpha_{nk} = T_n'(z_{nk})$, ein Verfahren, das FEJÉR ([4], S. 335) bereits zur Interpolation im Reellen verwandt hat; die sich so ergebenden $p_n(z)$ bezeichnen wir mit $F_n(z)$. Sie konvergieren für $n \to \infty$ und $z \in D$ gegen $f(z)$, und unter zusätzlichen Annahmen über $f(z)$ lassen sich weiterhin Aussagen machen über die Stärke der Konvergenz von $F_n(z) \to f(z)$ $(z \in D)$, sowie über Konvergenz der $F_n(z)$ für $z \in C$.

Ist schließlich $f(z)$ auf C regulär, so wählen wir $\alpha_{nk} = f'(z_{nk})$ und bezeichnen die entsprechenden $p_n(z)$ mit $H_n(z)$. Auch sie konvergieren, wie die $J_n(z)$, für $n \to \infty$ und $z \in D$ gegen (1.4), während auf C und außerhalb C im allgemeinen Divergenz auftritt. Ist jedoch $f(z)$ sogar im abgeschlossenen Innern von C regulär, so konvergieren die $H_n(z)$ in $\overline{D}$ maximal gegen $f(z)$, und unter zusätzlichen Annahmen über $f(z)$ lassen sich Aussagen machen über die Stärke der Konvergenz von $H_n(z) \to f(z)$ für $z \in \overline{D}$.

Wir beschließen die Arbeit mit der Angabe einiger Gegenbeispiele, bei denen jeweils Funktionen $f(z)$, die in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig sind, in den Punkten $z_{nk} = r\, e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots;\ 0 < r \leq 1)$ interpoliert werden. Dabei interessieren wir uns für Divergenz und Nicht-BOREL-Limitierbarkeit der Folgen $\{L_n(z)\}$, $\{J_n(z)\}$ und $\{H_n(z)\}$ für Punkte z auf $|z| = 1$.

2. Hilfsformeln. Es sei C eine analytische JORDAN-Kurve der z-Ebene, und z_{nk} seien die auf C gelegenen Punkte (1.1). Für das den Bedingungen (1.3) genügende Polynom $p_n(z)$ vom Grade $\leq 2n-1$ liefert die LAGRANGE-HERMITEsche Formel die Darstellung

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk})\, g_{nk}(z) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk}\, h_{nk}(z) \tag{2.1}$$

mit

$$(2.2)\quad \begin{cases} g_{nk}(z) = \left[1 - \dfrac{\omega_n''(z_{nk})}{\omega_n'(z_{nk})}(z - z_{nk})\right](l_{nk}(z))^2, \quad h_{nk}(z) = (z - z_{nk})(l_{nk}(z))^2, \\ \omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_{nk}), \qquad l_{nk}(z) = \dfrac{\omega_n(z)}{\omega_n'(z_{nk})(z - z_{nk})}. \end{cases}$$

Wir benötigen Aussagen über das Verhalten von $\omega_n(z)$ $(z \in D)$, $\omega_n'(z_{nk})$, $\omega_n''(z_{nk})$ für $n \to \infty$.

Hilfssatz 1. *Für ein $\delta > 0$ gilt gleichmäßig in $|w| > 1 - \delta$*

$$(2.3)\qquad \Phi_n(w) = \frac{\omega_n(\psi(w))}{c^n(w^n - 1)} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Für $w = e^{i\varphi}$ gilt gleichmäßig in k

$$(2.4)\qquad \frac{\omega_n'(z_{nk})}{i n c^n} \frac{d\psi\left(e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right)}{d\varphi} \to 1 \qquad (n \to \infty),$$

$$(2.5)\qquad \frac{\omega_n''(z_{nk})}{n^2 c^n} \left[\frac{d\psi\left(e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right)}{d\varphi}\right]^2 \to -1 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Da C eine analytische JORDAN-Kurve ist, ist $\psi(w)$ und daher $\Phi_n(w)$ für ein $\delta > 0$ in $|w| > 1 - 2\delta$ regulär. Nach CURTISS ([1], S. 463) gilt gleichmäßig für $|w| = 1 - \delta$ die Relation $\omega_n(\psi(w))/c^n \to -1$, also gilt (2.3) für $|w| = 1 - \delta$ und daher gleichmäßig für $|w| \geqq 1 - \delta$.

Differenziert man (2.3) für $w = e^{i\varphi}$ nach w, so erhält man für $|w| = 1$

$$(2.6)\qquad \frac{-n w^{n-1}}{c^n(w^n - 1)^2}\omega_n(\psi(w)) + \frac{1}{c^n(w^n - 1)}\omega_n'(\psi(w))\frac{1}{i w}\frac{d\psi(w)}{d\varphi} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Nach Multiplikation von (2.6) mit $(w^n - 1)\, w/n$ ergibt sich

$$-\Phi_n(w)\, w^n + \frac{\omega_n'(\psi(w))}{i n c^n}\frac{d\psi(w)}{d\varphi} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also, wenn man $w = w_{nk}$ setzt, gerade die Relation (2.4).

Die Formel (2.5) erhält man auf ähnliche Weise durch zweimalige Differentiation von (2.3), wenn man die dann entstehende Beziehung mit $(w^n - 1)\, w^2/n^2$ durchmultipliziert und (2.6) nochmals berücksichtigt.

3. Die Polynome $J_n(z)$. Die Funktion $f(z)$ sei auf der analytischen JORDAN-Kurve C eigentlich R-integrierbar, und es sei $J_n(z)$ das Polynom vom Grade $\leqq 2n - 1$, das in den Punkten (1.1) auf C den Bedingungen $J_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$, $J_n'(z_{nk}) = \alpha_{nk}$ genügt, wobei α_{nk} eine Folge von Zahlen mit $|\alpha_{nk}| \leqq \varepsilon_n \cdot \dfrac{n}{\log n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots;\ \varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty)$ bedeutet.

Satz 1. *Für $z \in D$ gilt*

$$J_n(z) \to \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) \qquad (n \to \infty),$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich B von D.

Dies verallgemeinert ein Resultat von LOSINSKY ([9], S. 319), der den Fall $C: |z|=1$, $\alpha_{nk}=0$ für alle n und k, und $f(z)$ analytisch in $|z|<1$, stetig in $|z|\leq 1$ behandelte.

Beweis. Wir schätzen für $z\in C$ zunächst den zweiten Term in der Darstellung von $J_n(z)$ gemäß (2.1) ab:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}\,h_{nk}(z)\right| \leq \varepsilon_n\cdot\frac{n}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\omega_n(\psi(w))}{c^n(w^n-1)}\,\frac{i\,n\,c^n}{\omega_n'(z_{nk})\,\psi^{\cdot}}\right|^2\times$$

$$\times\frac{|\psi^{\cdot}|^2\,|w^n-1|\left|\dfrac{w-w_{nk}}{z-z_{nk}}\right|}{n^2}\left|\frac{w^n-1}{w-w_{nk}}\right|$$

$$\leq \varepsilon_n\cdot\frac{n}{\log n}\,M_1\,M_2\,\frac{M_3^{\cdot}}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{w^n-1}{w-w_{nk}}\right| \text{ [1)]}$$

$$\leq \varepsilon_n\cdot\frac{n}{\log n}\,M_1\,M_2\,\frac{M_3}{n^2}\,n\log n = o(1),$$

also strebt dieser Term gleichmäßig für $z\in\overline{D}$ gegen Null für $n\to\infty$. Dabei wurde, wie auch im folgenden, $\psi^{\cdot}=\dfrac{d\psi\left(e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)}{d\varphi}$ gesetzt. Der vom Summand 1 in $g_{nk}(z)$ herrührende Beitrag wird für $z\in D$ ganz ähnlich beurteilt:

$$(3.1)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n}f(z_{nk})\,(l_{nk}(z))^2\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}f(z_{nk})\,\frac{h_{nk}(z)}{z-z_{nk}}\right| \leq \frac{M}{\delta}\sum_{k=1}^{n}|h_{nk}(z)| = o(1)\quad(n\to\infty)$$

gleichmäßig für $z\in B$; hierin wurde $|f(z)|\leq M$ $(z\in C)$ und $|z-z_{nk}|\geq\delta$ $(z\in B)$ angenommen.

Somit haben wir für $z\in B$

$$(3.2)\qquad \begin{cases} J_n(z) = o(1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\psi(w_{nk}))}{\psi(w_{nk})-z}\,\frac{(\omega_n(z))^2\,\omega_n''(z_{nk})}{(\omega_n'(z_{nk}))^3} \\ \qquad = o(1)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\psi(w_{nk}))}{\psi(w_{nk})-z}\left[\frac{\omega_n(z)}{-c^n}\right]^2\frac{-\omega_n''(z_{nk})\,\psi^{\cdot 2}}{n^2\,c^n}\left[\frac{i\,n\,c^n}{\omega_n'(z_{nk})\,\psi^{\cdot}}\right]^3\psi^{\cdot}\,\frac{2\pi}{n}, \end{cases}$$

was auf Grund von (2.3) bis (2.5) für $n\to\infty$ und $z\in B$ gleichmäßig gegen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{f(\psi(e^{i\varphi}))}{\psi(e^{i\varphi})-z}\,\frac{d\psi(e^{i\varphi})}{d\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = f_1(z)$$

strebt, wie in Satz 1 behauptet ist.

4. Die Polynome $F_n(z)$. Nun sei $f(z)$ eine innerhalb der analytischen JORDAN-Kurve C reguläre, im abgeschlossenen Bereich $\overline{D}$ stetige Funktion, und $T_n(z)$ bezeichne das zu $f(z)$ gehörige TCHEBYCHEFF-Polynom vom Grade

[1)] Eine Abschätzung der Summe findet man bei CURTISS ([1], S. 468), wo allerdings ein Faktor n fehlt; vgl. auch JACKSON ([8], S. 119/120).

$\leqq 2n-1$[2]; der Approximationsfehler sei

$$E_n = \max_{z\in\overline{D}} |f(z) - T_n(z)| . \tag{4.1}$$

Um Polynome $p_n(z)$ zu erhalten, die in den Punkten (1.1) von C Bedingungen der Form (1.3) erfüllen, und die sich auf Stärke der Konvergenz $p_n(z)\to f(z)$ $(z\in\overline{D})$ untersuchen lassen, ist es zweckmäßig, in (1.3) die Wahl $\alpha_{nk} = T_n'(z_{nk})$ zu treffen; diese Polynome nennen wir $F_n(z)$.

Satz 2. *Zu jedem abgeschlossenen Teilbereich B von D gibt es eine Konstante $M = M(B, C)$, für die*

$$|f(z) - F_n(z)| \leqq M E_n \qquad (z\in B;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

gilt. Ferner gibt es eine Konstante $N = N(C)$, für die

$$|f(z) - F_n(z)| \leqq N E_n \log n \qquad (z\in\overline{D};\ n = 2, 3, \ldots) \tag{4.3}$$

gilt.

Genügt $f^{(p)}(z)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ für $z\in\overline{D}$ einer Lipschitz-Bedingung der Ordnung α $(0<\alpha\leqq 1)$, so gilt demnach

$$|f(z) - F_n(z)| = O(n^{-p-\alpha}) \ (z\in B) \quad \text{und} \quad |f(z) - F_n(z)| = O(\log n\, n^{-p-\alpha}) \ (z\in\overline{D});$$

denn in diesem Falle hat man (Curtiss [2], S. 873)

$$E_n = O(n^{-p-\alpha}) .$$

Beweis von Satz 2. Die Polynome $T_n(z)$ und $F_n(z)$ gestatten nach (2.1) die Darstellung

$$T_n(z) = \sum_{k=1}^{n} T_n(z_{nk})\, g_{nk}(z) + \sum_{k=1}^{n} T_n'(z_{nk})\, h_{nk}(z)$$

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk})\, g_{nk}(z) + \sum_{k=1}^{n} T_n'(z_{nk})\, h_{nk}(z) .$$

Also ist

$$\left\{\begin{aligned} |F_n(z) - T_n(z)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} [f(z_{nk}) - T_n(z_{nk})]\, g_{nk}(z)\right| \\ &\leqq E_n \sum_{k=1}^{n} |g_{nk}(z)| = E_n N_n(z) \qquad (z\in\overline{D}), \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

und wir haben das Verhalten von $N_n(z)$ für $z\in B$ bzw. $z\in C$ und $n\to\infty$ zu untersuchen.

Zunächst folgt aus Hilfssatz 1, daß für $z\in C$, d.h. $|w| = |\psi^{-1}(z)| = 1$, und eine von z unabhängige Konstante M_1

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n'(z_{nk})\,(z - z_{nk})}\right|^2 &= \left|\frac{\omega_n(\psi(w))}{c^n(w^n - 1)}\,\frac{i n c^n}{\omega_n'(z_{nk})\,\psi^{\cdot}}\,\frac{w - w_{nk}}{z - z_{nk}}\,\frac{\psi^{\cdot}}{n}\,\frac{w^n - 1}{w - w_{nk}}\right|^2 \\ &\leqq \frac{M_1}{n^2}\left|\frac{w^n - 1}{w - w_{nk}}\right|^2 \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

[2]) Das heißt, daß $\max_{z\in\overline{D}} |f(z) - T_n(z)| \leqq \max_{z\in\overline{D}} |f(z) - \pi_n(z)|$ ist für alle Polynome $\pi_n(z)$ vom Grade $\leqq 2n-1$.

ist, so daß der vom Summanden 1 in $g_{nk}(z)$ herrührende Beitrag zu $N_n(z)$ $(z \in C)$ durch

$$\frac{M_1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 = M_1$$

abgeschätzt werden kann. Dabei machten wir Gebrauch von

$$\begin{aligned}
\left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 &= \left(\frac{1 - (\overline{w}\, w_{nk})^n}{1 - (\overline{w}\, w_{nk})} \right) \left(\frac{1 - (w\, \overline{w_{nk}})^n}{1 - (w\, \overline{w_{nk}})} \right) \\
&= \left(1 + (\overline{w}\, w_{nk}) + \cdots + (\overline{w}\, w_{nk})^{n-1}\right) \left(1 + (w\, \overline{w_{nk}}) + \cdots + (w\, \overline{w_{nk}})^{n-1}\right) \\
&= 1 + (w\, \overline{w_{nk}}) + \cdots + (w\, \overline{w_{nk}})^{n-1} \\
&\quad + \overline{w}\, w_{nk} + 1 + \cdots + (\overline{w}\, w_{nk})\, (w\, \overline{w_{nk}})^{n-1} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + (\overline{w}\, w_{nk})^{n-1} + \cdots + 1,
\end{aligned}$$

was für $k = 1, 2, \ldots, n$ aufsummiert gerade n^2 ergibt. Da weiterhin für beliebige z

$$\left| \frac{\omega_n''(z_{nk})}{\omega_n'(z_{nk})} (z - z_{nk}) \right| = \left| \frac{\omega_n''(z_{nk})\, \psi'^2}{n^2 c^n} \right| \left| \frac{i n c^n}{\omega_n'(z_{nk})\, \psi'} \right| \frac{n |z - z_{nk}|}{|\psi'|} \leq M_2\, n\, |z - z_{nk}| \tag{4.6}$$

gilt, haben wir für $z \in C$, d.h. $|w| = 1$,

$$\left\{ \begin{aligned}
N_n(z) &\leq M_1 + \frac{M_1 M_2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 |z - z_{nk}| \\
&\leq M_1 + \frac{M_1 M_2 |w^n - 1|}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_{nk}}{w - w_{nk}} \right| \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right| \\
&\leq M_1 + \frac{2 M_1 M_2 M_3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right| \leq M_1 + \frac{2 M_1 M_2 M_3 M_4}{n}\, n \log n.
\end{aligned} \right. \tag{4.7}$$

Nun gilt aber

$$|f(z) - F_n(z)| \leq |f(z) - T_n(z)| + |F_n(z) - T_n(z)| \leq E_n + E_n N_n(z) \quad (z \in \overline{D}), \tag{4.8}$$

woraus mit (4.7) die Gültigkeit von (4.3) für $z \in C$, also auch für $z \in \overline{D}$ folgt.

Liegt z in B, so wählen wir ein $\delta > 0$ derart, daß $\psi(w)$ in $|w| \geq 1 - \delta$ regulär ist und B in der von $z = \psi(w)$ $(|w| = 1 - \delta)$ beschriebenen JORDAN-Kurve C' gelegen ist. Für $z \in C'$, d.h. $|w| = 1 - \delta$, gilt dann vermöge (4.5)[3] und (4.6)

$$N_n(z) \leq M_1 + \frac{M_1 M_2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 |z - z_{nk}| \leq M_1 + \frac{M_1 M_2}{n} \sum_{k=1}^{n} M_5(\delta) \leq M_6(\delta),$$

und auf Grund des Maximumprinzips gilt dies auch in B. Zusammen mit (4.8) folgt daraus (4.2).

[3] Diese Ungleichung gilt ersichtlich auch für $|w| = 1 - \delta$.

5. *Die Polynome* $H_n(z)$. Schließlich wollen wir annehmen, daß $f(z)$ auf der JORDAN-Kurve C regulär sei und daß $\alpha_{nk} = f'(z_{nk})$ in (1.3) gewählt werde; die $z_{nk} \in C$ sind wieder die Punkte (1.1).

Für die dadurch definierten Interpolationspolynome $H_n(z)$ leiten wir zuerst eine Darstellungsformel her. Darin bedeuten C^1 und C^2 zwei rektifizierbare JORDAN-Kurven, die ein Ringgebiet R begrenzen derart, daß C im Innern von C^1 und C^2 im Innern von C liegt und $f(z)$ im abgeschlossenen Bereich $\overline{R}$ regulär ist. Endlich ist noch die Funktion $f_1(z)$ durch

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (z \text{ innerhalb } C^1)$$

erklärt.

Hilfssatz 2. *Ist* $P_n(z)$ *ein beliebiges Polynom vom Grade* $\leq 2n-1$, *so gilt für* $H_n(z)$ *die Darstellungsformel*

$$(5.1)\quad \begin{cases} H_n(z) = f_1(z) - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^1} \left(\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right)^2 \frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt + \\ \qquad + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^2} \left(1 - \frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right) \frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt \qquad (z \in R)^4). \end{cases}$$

Beweis. Zunächst stellt man leicht fest, daß

$$(5.2)\qquad H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1+C^2} \left(1 - \frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right) \frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (z \in R)$$

ist. Denn ersichtlich stellt die rechte Seite von (5.2) ein Polynom vom Grade $\leq 2n-1$ dar, für das man überdies leicht die Gültigkeit von $H_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$, $H_n'(z_{nk}) = f'(z_{nk})$ verifiziert. Daher ist

$$f_1(z) - H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \left(\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right)^2 \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C^2} \left(1 - \frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right) \frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (z \in R).$$

Setzt man hierin für $f(t)$ ein beliebiges Polynom $P_n(t)$ vom Grade $\leq 2n-1$ ein, so entsteht links Null, und man erhält durch Subtraktion beider Relationen

$$(5.3)\quad \begin{cases} f_1(z) - H_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^1} \left(\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right)^2 \frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt - \\ \qquad - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^2} \left(1 - \frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right) \frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt \qquad (z \in R), \end{cases}$$

also gerade (5.1).

Nun wenden wir uns der Untersuchung der Folge $\{H_n(z)\}$ zu.

a. In diesem Abschnitt verlangen wir von C, daß

$$(*)\quad \begin{cases} \text{die Abbildungsfunktion } z = \psi(w) \text{ eine für } |w| \geq 1 \text{ stetige Ableitung } \psi'(w) \\ \text{besitze, die auf } |w| = 1 \text{ einer LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung } \alpha \\ (0 < \alpha \leq 1) \text{ genüge.} \end{cases}$$

4) Für den Fall gewöhnlicher LAGRANGE-Interpolation wurde eine analoge Darstellungsformel für die $L_n(z)$ von WALSH und SEWELL ([11], S. 660) angegeben. In (5.1) werde C^1 im positiven, C^2 im negativen Sinn durchlaufen.

Diese Bedingung (*) ist z. B. sicher dann erfüllt, wenn C rektifizierbar ist, und wenn die Krümmung von C eine stetige Funktion der Bogenlänge ist.

Dann können wir nämlich mit CURTISS ([1], S. 463) behaupten, daß $\omega_n(z)/c^n \to -1$ strebt für $n \to \infty$, gleichmäßig für jeden abgeschlossenen Teil B^* von D. Ist B^* eine zwischen C und C^2 verlaufende JORDAN-Kurve, die C^2 enthält, so hat dies zur Folge, daß $\omega_n(z)/\omega_n(t) \to 1$ strebt, gleichmäßig für $z \in B^*$ und $t \in C^2$. Da weiterhin, sogar im Falle einer allgemeinen JORDAN-Kurve C, die Relation $\lim_{n\to\infty} |\omega_n(\psi(w))|^{1/n} = |c|\,|w|$ gilt für $|w| > 1$ (FEJÉR [3], S. 322–324), so strebt $\omega_n(z)/\omega_n(t) \to 0$, gleichmäßig für $z \in B^*$ und $t \in C^1$. Wählt man also $P_n(z) \equiv 0$ in (5.3) für alle n, so ergibt sich sofort

$$f_1(z) - H_n(z) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

gleichmäßig für $z \in B^*$, also auch innerhalb B^*. Wir bewiesen somit den folgenden

Satz 3. *Ist C eine* JORDAN*-Kurve derart, daß (*) erfüllt ist, so gilt*

$$H_n(z) \to \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) \qquad (n \to \infty,\ z \in D), \tag{5.4}$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich B von D.

Für z auf C oder außerhalb C findet im allgemeinen keine Konvergenz der Polynome $H_n(z)$ statt. Um dies an einem Beispiel zu zeigen, nehmen wir C: $|z| = 1$ und $f(z) = 1/z$. Man bestätigt sofort, daß

$$H_n(z) = z^{n-1}(2 - z^n)$$

das Polynom vom Grade $2n-1$ ist, für welches $H_n(z_{nk}) = z_{nk}^{-1}$ und $H_n'(z_{nk}) = -z_{nk}^{-2}$ ist, wobei z_{nk} die n-ten Einheitswurzeln bedeuten. Offenbar divergieren $\{H_n(-1)\}$ und $\{H_n(z)\}$ ($|z| > 1$).

b. Konvergenzaussagen auf C und darüber hinaus lassen sich machen, wenn $f(z)$ im abgeschlossenen Innern der nun beliebigen JORDAN-Kurve C regulär ist, was wir in **b** annehmen wollen. Mit C_ϱ bezeichnen wir im folgenden die analytische JORDAN-Kurve $z = \psi(w)$ ($|w| = \varrho > 1$), mit D_ϱ ihr Inneres, und $R > 1$ sei die größte aller Zahlen ϱ von der Eigenschaft, daß $f(z)$ in D_ϱ regulär ist.

Satz 4. *Ist C eine beliebige* JORDAN*-Kurve und $f(z)$ in D_R regulär, so konvergiert die Folge $\{H_n(z)\}$ für $z \in \overline{D}$ maximal gegen $f(z)$, d. h. es ist für $z \in \overline{D}$ und jedes ϱ mit $1 < \varrho < R$*

$$|f(z) - H_n(z)| \leq \frac{M(\varrho)}{\varrho^{2n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.5}$$

Beweis. Wir setzen in (5.3)

$$P_n(z) \equiv 0 \quad \text{für alle } n, \qquad C^1 = C_{\varrho+\varepsilon_1} \qquad (0 < \varepsilon_1 < R - \varrho)$$

und wählen ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4\varrho}$. Auf Grund des schon in **a** benutzten FEJÉRschen Resultats gilt für $n > n_0$

$$|\omega_n(z)| \leq |c|^n (1 + 2\varepsilon_2)^n \quad (z \in C_{1+\varepsilon_2}), \qquad |\omega_n(t)| \geq |c|^n \left(\varrho + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)^n \quad (t \in C_{\varrho+\varepsilon_1}).$$

Berücksichtigt man dies in (5.3), so kommt sofort — der zweite Term fällt weg —

$$|f_1(z) - H_n(z)| \leq M_1(\varrho)\left(\frac{1+2\varepsilon_2}{\varrho+\frac{\varepsilon_1}{2}}\right)^{2n} < \frac{M_1(\varrho)}{\varrho^{2n}} = \frac{M(\varrho)}{\varrho^{2n-1}}$$

für $z \in C_{1+\varepsilon_1}$, also erst recht für $z \in \overline{D}$.

Wir wollen noch daran erinnern, *daß die Gültigkeit von* (5.5) *die Konvergenz der Folge* $\{H_n(z)\}$ *gegen* $f(z)$ *für* $z \in D_R$ *nach sich zieht* (WALSH [*10*], S. 78); für $z \in C_R$ und außerhalb von C_R divergiert jedoch $\{H_n(z)\}$ im allgemeinen, selbst wenn $f(z)$ in $\overline{D_R}$ stetig ist (vgl. § 6).

c. Auch über die Güte der Approximation von $H_n(z) \to f(z)$ $(z \in \overline{D})$ wollen wir etwas aussagen. Ist $f(z)$ in D_R regulär, in $\overline{D_R}$ stetig, so bezeichne man mit $T_n(z)$ das zu $f(z)$ und $\overline{D_R}$ gehörige TCHEBYCHEFF-Polynom vom Grade $\leq 2n-1$ und setze

$$E_n = \max_{z \in \overline{D_R}} |f(z) - T_n(z)|.$$

Satz 5. *Ist* C *eine analytische* JORDAN-*Kurve und* $f(z)$ *in* D_R *regulär, in* $\overline{D_R}$ *stetig, so gilt für eine von* n *und* z *unabhängige Konstante* M

$$|f(z) - H_n(z)| \leq M \frac{E_n}{R^{2n}} \qquad (z \in \overline{D};\ n = 1, 2, \ldots). \tag{5.6}$$

Beweis. Aus (2.3) folgt die Existenz einer von n, t und z unabhängigen Konstanten N derart, daß

$$\left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right| \leq \frac{N}{R^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

für $z \in C$ und $t \in C_R$ gilt. Benützt man dies, um (5.3) abzuschätzen, und setzt dort $P_n(t) = T_n(t)$ ein, so folgt (5.6) sofort für $z \in C$, also auch für $z \in \overline{D}$.

6. Einige Gegenbeispiele. Abschließend wollen wir unsere Resultate noch durch einige Gegenbeispiele ergänzen[5]).

a. Satz 6. *Es gibt eine in* $|z| < 1$ *reguläre, in* $|z| \leq 1$ *stetige Funktion* $f(z)$ *derart, daß die für* $f(z)$ *und die Interpolationspunkte* $z_{nk} = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ *gebildeten Polynomfolgen* $\{L_n(z)\}$ *und* $\{J_n(z)\}$ *für* $z = -1$ *nicht* BOREL-*limitierbar sind.*

Dies verallgemeinert Ergebnisse von FEJÉR ([*3*], S. 327) und LOSINSKY ([*9*], S. 319), die bereits die Möglichkeit der Divergenz der Folgen $\{L_n(-1)\}$ und $\{J_n(-1)\}$ (im Spezialfall $\alpha_{nk} = 0$ für alle n und k) feststellten. Satz 6 steht in Analogie zu der bekannten Tatsache, daß es in $|z| < 1$ reguläre, in $|z| \leq 1$ stetige $f(z)$ gibt, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z = 1$ nicht B-summierbar ist (GAIER [*5*], S. 329), doch ist der Beweis von Satz 6 schwieriger.

[5]) Bezüglich der $H_n(z)$ war schon im Anschluß an Satz 3 und 4 einiges bemerkt worden.

Beweis. 1. Wir wenden uns zunächst den $L_n(z)$ zu $(n=1, 2, \ldots)$. Unsere Entwicklungen werden formal etwas einfacher, wenn wir statt den Interpolationspunkten z_{nk} die Punkte $\zeta_{nk}=-z_{nk}$ wählen, die den ζ_{nk} entsprechenden Polynome $L_n^*(z)$ bilden, und dann $\{L_n^*(1)\}$ untersuchen. Die Grundlage für unseren Beweis bilden die von FEJÉR eingeführten Polynome

$$(6.1)\quad g_\nu(z)=\left(\frac{1}{\nu}+\frac{z}{\nu-1}+\cdots+\frac{z^{\nu-1}}{1}\right)-\left(\frac{z^{\nu+1}}{1}+\cdots+\frac{z^{2\nu}}{\nu}\right)\quad(\nu=1, 2, \ldots),$$

für die wir zunächst einige Eigenschaften ableiten[6]).

α) $L_n^*(g_\nu; 1)=0$ $(n\geqq 2\nu+1)$.

$g_\nu(z)$ ist nämlich ein Polynom vom Grade $2\nu\leqq n-1$, das mit $L_n^*(g_\nu; z)$ in den n Punkten ζ_{nk} $(k=1, 2, \ldots, n)$ übereinstimmt, d.h. $L_n^*(g_\nu; z)=g_\nu(z)$, woraus $L_n^*(g_\nu; 1)=0$ folgt.

β) $L_n^*(g_\nu; 1)\geqq 0$ $(\nu=u\,n$, u und n ungerade Zahlen $>0)$.

Dazu ziehen wir die LAGRANGEsche Interpolationsformel

$$(6.2)\qquad L_n^*(g_\nu; z)=\sum_{k=1}^{n} g_\nu(\zeta_{nk})\,l_{nk}(z)$$

heran. [Bezeichnung wie in (2.2), z_{nk} durch ζ_{nk} ersetzt, so daß $\zeta_{nk}^{p\,n}=(-1)^{p\,n}$ ist.] Für $g_\nu(z)$ setzen wir

$$g_\nu(z)=\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{z^\varrho}{\nu-\varrho}-\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{z^{\nu+\varrho+1}}{\varrho+1}$$

in (6.2) ein, was

$$(6.3)\qquad L_n^*(g_\nu; z)=\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{1}{\nu-\varrho}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{nk}^{\varrho}\,l_{nk}(z)-\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{1}{\varrho+1}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{nk}^{\nu+\varrho+1}\,l_{nk}(z)$$

ergibt. Der unter dem zweiten Summenzeichen stehende Ausdruck stellt das Polynom vom Grade $\leqq n-1$ vor, das z^ϱ in den Punkten ζ_{nk} interpoliert, d.h. dieser Ausdruck ist, für $z=1$ genommen,

$$=1\ (0\leqq\varrho\leqq n-1);\quad=-1\ (n\leqq\varrho\leqq 2n-1);\quad=1\ (2n\leqq\varrho\leqq 3n-1);\ldots.$$

Für den ersten Term in (6.3) erhalten wir somit an der Stelle $z=1$

$$\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu-1}+\cdots+\frac{1}{\nu-n+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu-n}+\cdots+\frac{1}{\nu-2n+1}\right)\pm\cdots+\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right).$$

Ganz entsprechend wertet man den zweiten Term in (6.3) aus, und es ergibt sich nach leichter Rechnung

$$(6.4)\qquad \begin{cases} L_n^*(g_\nu; 1)=2\left\{\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{\varrho}-\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{n+\varrho}\pm\cdots+\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{(u-1)\,n+\varrho}\right\} \\ \qquad\geqq 2\left\{\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{(u-1)\,n+\varrho}\right\}\geqq 0. \end{cases}$$

[6]) Im folgenden bezeichnet $L_n(f; z)$ [bzw. $L_n^*(f; z)$] das zu $f(z)$ und den z_{nk} [bzw. ζ_{nk}] gehörige Polynom $L_n(z)$ [bzw. $L_n^*(z)$] vom Grade $\leqq n-1$.

$\gamma)$ $L^*_{n+\tau}(g_n; 1) = 2\sum_{\varrho=\tau}^{n} \frac{1}{\varrho}$ $(\tau = 2, 4, 6, \ldots; \tau < n;$ n ungerade Zahl $> 0)$.

Die Auswertung von (6.3) ergibt hier, an der Stelle $z = 1$ genommen,

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\tau - 1}\right) + \left(\frac{1}{\tau} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 2\sum_{\varrho=\tau}^{n} \frac{1}{\varrho}.$$

$\delta)$ $L^*_{n-\tau}(g_n; 1) = 2\sum_{\varrho=1+\tau}^{n-1-2\tau} \frac{1}{\varrho}$ $(\tau = 0, 2, 4, \ldots; \tau < n/4;$ n ungerade Zahl $> 0)$.

Für $\tau = 0$ ist das richtig, wie aus (6.4) für $u = 1$ folgt. Im Falle $\tau = 2$ hat man

$$L^*_{n-2}(g_n; 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-5} - \\ - \frac{1}{n-4} - \cdots - \frac{1}{n} = 2\sum_{\varrho=3}^{n-5} \frac{1}{\varrho},$$

im Falle $\tau = 4$ ganz analog $L^*_{n-4}(g_n; 1) = 2\sum_{\varrho=5}^{n-9} \frac{1}{\varrho}$, usf., also gerade das Ergebnis $\delta)$.

$\varepsilon)$ $|L^*_n(g_\nu; 1)| \leq M_1 \log n$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$ und $n = 2, 3, \ldots$.

Dies folgt aus einem Ergebnis von Curtiss ([1], S. 467), da gleichmäßig in ν und für $|z| \leq 1$ $|g_\nu(z)| \leq N$ ist, könnte aber auch direkt durch Auswertung bestätigt werden.

Nun gehen wir an die Konstruktion von $f(z)$. Da $g_\nu(z)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $|z| \leq 1$ gleichmäßig beschränkt ist, stellt

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} g_{\nu_r}(z) \tag{6.5}$$

für jede Folge $\{\nu_r\}$ monoton gegen ∞ strebender ganzer Zahlen eine in $|z| < 1$ reguläre, in $|z| \leq 1$ stetige Funktion dar, und es gilt

$$L^*_n(f; z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} L^*_n(g_{\nu_r}; z) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.6}$$

Die ν_r seien wie folgt gewählt:

a) $\nu_1 = 3$, ν_r alle ungerade,

b) $\nu_r \geq 3^{r^3}$ $(r = 1, 2, \ldots)$,

c) $\frac{3}{4}\nu_r \geq 2\nu_{r-1} + 1$,

d) ν_r ungerades Vielfaches aller im Intervall $< \left[\frac{3\nu_{r-1}}{4}\right] + 1, \left[\frac{5\nu_{r-1}}{4}\right] >$ gelegenen ungeraden Zahlen.

Schließlich bemerken wir noch, daß $L^*_n(f; 1) = f(1) = 0$ ist, falls n eine gerade Zahl ist, und daß wegen der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z| \leq 1$ analog zu $\varepsilon)$

$$|L^*_n(f; 1)| \leq M_2 \log(n + 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.7}$$

gilt.

Nun bilden wir die BOREL-Transformation $B(x; L_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, L_n^*$ der Folge (6.6) für $x = \nu_r$ und $z = 1$:

$$B(\nu_r; L_n^*(f;1)) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} u_\sigma(\nu_r)\, L_\sigma^*(f;1) = \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]} + \sum_{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]+1}^{\nu_r} + \sum_{\nu_r+1}^{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]} +$$

$$+ \sum_{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]+1}^{\left[\frac{5\nu_r}{4}\right]} + \sum_{\left[\frac{5\nu_r}{4}\right]+1}^{\infty} = A_r^{(1)} + A_r^{(2)} + A_r^{(3)} + A_r^{(4)} + A_r^{(5)}.$$

Hierin ist unter Benützung bekannter Abschätzungen für u_σ (vgl. HARDY [6], S. 200)

$$(6.8) \quad |A_r^{(1)}| \leq \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]} u_\sigma(\nu_r)\, M_2 \log(\sigma+1) \leq M_3 \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]} u_\sigma(\nu_r)\, \sigma = o(1) \quad (r \to \infty),$$

und ebenso findet man

$$(6.9) \qquad |A_r^{(5)}| \leq o(1) \qquad (r \to \infty).$$

Sodann zeigen wir, daß für ungerades $\sigma \in < \left[\frac{3\nu_r}{4}\right]+1, \left[\frac{5\nu_r}{4}\right] >$ stets $L_\sigma^*(f;1) \geqq 0$ gilt, was zusammen mit $L_\sigma^*(f;1) = 0$ für gerades σ

$$(6.10) \qquad A_r^{(2)} \geqq 0, \quad A_r^{(4)} \geqq 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

nach sich ziehen würde. Tatsächlich ist für die genannten σ

$$(6.11) \qquad L_\sigma^*(f;1) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2}\, L_\sigma^*(g_{\nu_t};1) = \sum_{t=1}^{r-1} + \frac{L_\sigma^*(g_{\nu_r};1)}{r^2} + \sum_{t=r+1}^{\infty} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Dabei ist für ungerades $\sigma > \frac{3\nu_r}{4} \geq 2\nu_{r-1}+1$, d.h. $\sigma > 2\nu_t + 1$ $(t < r)$ wegen $\alpha)$: $L_\sigma^*(g_{\nu_t};1) = 0$, d.h. $\alpha_1 = 0$. Für $t > r$ ist $\nu_t = u\,\nu_{r+1}$ (u ungerade), wegen unserer Konstruktionsvorschrift d) daher $\nu_t = u'\sigma$ (u' ungerade). Der Eigenschaft $\beta)$ zufolge ist daher $L_\sigma^*(g_{\nu_t};1) \geqq 0$ für unsere σ und alle $t > r$, d.h. $\alpha_3 \geqq 0$. $\gamma)$ und $\delta)$ schließlich bestätigen vollends, daß für unsere σ stets $L_\sigma^*(g_{\nu_r};1) \geqq 0$, d.h. $\alpha_2 \geqq 0$ gilt.

Somit bleibt noch die Abschätzung der $A_r^{(3)}$ übrig. Zunächst haben wir

$$A_r^{(3)} = \sum_{\sigma=\nu_r+1}^{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]} u_\sigma(\nu_r)\, L_\sigma^*(f;1) \geq \frac{C_1}{\sqrt{\nu_r}} \sum_{\sigma=\nu_r+1}^{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]} L_\sigma^*(f;1)$$

für ein von r unabhängiges C_1, und unter der Summe interessieren uns wieder die L_σ^* für ungerades σ, da sie ja für gerade σ verschwinden. Nun besagte

aber (6.11) und γ), daß für $\sigma = \nu_r + h$ $(h = 2, 4, \ldots; h \leq [\sqrt{\nu_r}])$

$$L_\sigma^*(f;1) \geq \frac{1}{\nu^2} L_\sigma^*(g_{\nu_r};1) = \frac{2}{\nu^2} \sum_{\varrho=h}^{\nu_r} \frac{1}{\varrho}$$

$$\geq \frac{C_2}{\nu^2} \left(\log \nu_r - \log(h+1)\right)$$

ist, d.h.

$$A_r^{(3)} \geq \frac{C_1 C_2}{\nu^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu_r}} \sum_h{}' \log \nu_r - \frac{1}{\sqrt{\nu_r}} \sum_h{}' \log(h+1) \right),$$

wobei $\sum_h{}'$ anzeigen soll, daß h alle positiven geraden Zahlen $\leq [\sqrt{\nu_r}]$ durchläuft. In der Klammer ist der erste Term $\cong \frac{1}{2} \log \nu_r$, wogegen der zweite Term sich wie $\frac{1}{4} \log \nu_r$ verhält, wie man mit Hilfe der STIRLINGschen Formel nachweist. Das bedeutet, daß

$$A_r^{(3)} \geq \frac{C_3}{\nu^2} \log \nu_r \geq \frac{C_3}{\nu^2} \nu^3 \log 3$$

gilt, und zusammengenommen mit (6.8) bis (6.10) folgt schließlich

$$\lim_{r \to \infty} B\left(\nu_r; L_n^*(f;1)\right) = +\infty. \tag{6.12}$$

2. Um den $\{J_n(z)\}$ betreffenden Teil von Satz 6 zu beweisen, zeigen wir zunächst

$$J_n(z) = (1 - z^n) L_n(z) + O(1) \qquad (n \to \infty), \tag{6.13}$$

gleichmäßig für $|z| \leq 1$. Diese Relation stammt von LOSINSKY ([9], S. 320) für den Fall, daß bei der Bildung von $J_n(z)$ alle $\alpha_{nk} = 0$ sind, d.h. für die Polynome $\bar{J}_n(z)$ mit $\bar{J}_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$, $\bar{J}_n'(z_{nk}) = 0$. Auf Grund von (2.1) sieht man aber sofort, daß

$$J_n(z) - \bar{J}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} h_{nk}(z),$$

und für diesen Ausdruck hatten wir schon beim Beweis von Satz 1 festgestellt, daß er $o(1)$ ist, gleichmäßig für $|z| \leq 1$, also gilt (6.13). Nimmt man statt den z_{nk} wieder die $\zeta_{nk} = -z_{nk}$ als Interpolationspunkte, so folgt aus (6.13) für die entsprechend zu $J_n(z)$ gebildeten Polynome $J_n^*(z)$ $J_n^*(1) = (1 - (-1)^n) L_n^*(1) + O(1)$ $(n \to \infty)$. Da für unser durch (6.5) erklärtes $f(z)$ für gerades n immer $L_n^*(1) = f(1) = 0$ gilt, folgt daher in diesem Falle

$$J_n^*(1) = 2 L_n^*(1) + O(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

im Hinblick auf (6.12) also auch

$$\lim_{r \to \infty} B\left(\nu_r; J_n^*(f;1)\right) = +\infty.$$

Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

b. Man kann sich fragen, ob sich die Konvergenzverhältnisse der Polynomfolgen $\{L_n(z)\}$ und $\{J_n(z)\}$ für $|z|=1$ verbessern, wenn wir an Stelle der z_{nk} in Satz 6 jetzt die regulären Punkte $z_{nk}=r\,e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots;$ $0<r<1)$ als Interpolationspunkte nehmen. Um überhaupt Konvergenz der $J_n(z)$ in $|z|<1$ erwarten zu können, müssen wir dabei die α_{nk} spezialisieren; es ist ja dann notwendig $J_n'(z_{nk})=f'(z_{nk})+o(1)$. Am günstigsten wird dabei die Wahl $\alpha_{nk}=f'(z_{nk})$ sein, d.h. statt der Polynome $J_n(z)$ betrachten wir jetzt die schon in **5** behandelten $H_n(z)$.

Satz 7. *Es gibt eine in $|z|<1$ reguläre, in $|z|\leq 1$ stetige Funktion $f(z)$ derart, daß die für $f(z)$ und die Interpolationspunkte $z_{nk}=r\,e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ $(k=1, 2, \ldots, n;$ $n=1, 2, \ldots;\ 0<r<1)$ gebildeten Polynomfolgen $\{L_n(z)\}$ und $\{H_n(z)\}$ für $z=1$ nicht* BOREL*-limitierbar sind.*

Beweis. Die HERMITEsche Formel liefert für $n=1, 2, \ldots$

$$f(z)-L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{z^n-r^n}{t^n-r^n}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z}\qquad(|z|<1),$$

während

$$f(z)-s_{n-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{z^n}{t^n}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z}\qquad(|z|<1)$$

ist $\left(f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu \text{ gesetzt}\right)$, also ist

$$|L_n(z)-s_{n-1}(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|t|=1}\frac{r^n(t^n-z^n)}{t^n(t-z)}\,\frac{f(t)\,dt}{t^n-r^n}\right|$$

$$\leq M r^n\int\limits_{|t|=1}\left|\frac{t^n-z^n}{t-z}\right||dt|\leq 2\pi M n r^n,$$

gleichmäßig für alle z in $|z|<1$, d.h. es ist

$$L_n(z)-s_{n-1}(z)=o(1)\qquad(n\to\infty),\tag{6.14}$$

gleichmäßig für alle z in $|z|\leq 1$[7]. Auf Grund des schon in **6a** erwähnten Resultats des Verfassers über Potenzreihen folgt daraus der auf $\{L_n(z)\}$ bezügliche Teil von Satz 7.

Ganz entsprechend zu (6.14) zeigt man, daß auch

$$H_n(z)-s_{2n-1}(z)=o(1)\qquad(n\to\infty)\tag{6.15}$$

ist, gleichmäßig für $|z|\leq 1$, und wenn $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ eine in $|z|<1$ reguläre, in $|z|\leq 1$ stetige Funktion ist, für die $\{s_{n-1}(1)\}$ nicht BOREL-limitierbar ist, so setzen wir $F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu z^\nu=f(z^2)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^{2\nu}$, wofür $\{S_{2n-1}(1)\}=\{s_{n-1}(1)\}$ nicht BOREL-limitierbar ist. Damit ist auch der zweite Teil von Satz 7 bewiesen.

[7]) Dies gilt sogar in $|z|\leq r^{-1}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, wie man durch Benützung einer BERNSTEINschen Polynomabschätzung (z.B. WALSH [10], S. 77) feststellt.

Literatur.

[1] Curtiss, J.: Interpolation in regularly distributed points. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 458—473 (1935). — [2] Curtiss, J. H.: A note on the degree of polynomial approximation. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 873—878 (1936). — [3] Fejér, L.: Interpolation und konforme Abbildung. Göttinger Nachr. **1918**, 319—331. — [4] Fejér, L.: Beste Approximierbarkeit einer gegebenen Funktion durch ein Polynom gegebenen Grades, wenn das Polynom sonst beliebig oder wenn es noch einer interpolatorischen Beschränkung unterworfen ist. Math. Nachr. **4**, 328—342 (1950/51). — [5] Gaier, D.: Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **56**, 326—334 (1952). — [6] Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [7] Jackson, D.: A formula of trigonometric interpolation. Rend. Circ. Mat. Palermo **37**, 371—375 (1914). — [8] Jackson, D.: The Theory of Approximation. New York 1930. — [9] Losinsky, S.: Sur le procédé d'interpolation de Fejér. C. R. (Dokadly) Acad. Sci. URSS. **24**, 318—321 (1939). — [10] Walsh, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [11] Walsh, J. L., and W. E. Sewell: Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials. Duke Math. J. **6**, 658—705 (1940). — [12] Zygmund, A.: Trigonometric interpolation. Chicago 1950.

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Keplerstr. 10.

(Eingegangen am 2. Juli 1954.)

Laugwitz, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 134—149 (1954)

Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom.

II: Riemannsche Geometrie in lokal-linearen Räumen[1]).

Von
Detlef Laugwitz.

§ 7. Einführung des affinen Zusammenhanges.

Definition. Ein B-lokal-linearer Raum[2]) heißt affin zusammenhängend, wenn für jeden seiner Punkte P feststeht, was es heißt, daß kontravariante Vektoren in infinitesimal benachbarten Punkten P, P' gleich sind, und wenn dies dadurch definiert ist, daß für jeden Punkt P in einem bestimmten, „in P geodätisch" genannten Koordinatensystem $\bar{x}$ ihre Koordinatendarstellungen gleich sind:

$$\bar{\xi}^i(\overset{\circ}{\bar{x}} + \delta\bar{x}) - \bar{\xi}^i(\overset{\circ}{\bar{x}}) = 0 \quad (\delta\bar{x} \text{ infinitesimal, } \overset{\circ}{\bar{x}} \text{ Koordinate von } P,$$
$$\overset{\circ}{\bar{x}} + \delta\bar{x} \text{ Koordinate von } P').$$

Diese Definition ist eine Erweiterung der klassischen Definition von Weyl [1, 100ff.] in der endlichdimensionalen Geometrie. Wenn man die Begriffe „infinitesimal benachbart" usw. vermeiden will, kann man die zur obigen synonyme Definition geben:

Definition. Ein B-lokal-linearer Raum[2]) heißt affin zusammenhängend, wenn für jeden seiner Punkte P feststeht, was es heißt, daß ein in einer Umgebung von P definiertes, in P differenzierbares Feld kontravarianter Vektoren in P stationär ist, und wenn dies dadurch definiert ist, daß in einem bestimmten, „in P geodätisch" genannten Koordinatensystem $\bar{x}$ gilt:

$$\frac{\delta\bar{\xi}^i(\overset{\circ}{\bar{x}})}{\delta\bar{x}^k} = 0 \quad (\overset{\circ}{\bar{x}} \text{ Koordinate von } P).$$

($\bar{\xi}^i(\bar{x})$ ist die Darstellung des Vektorfeldes im Koordinatensystem $\bar{x}$.)

Satz 7.1. *In einem beliebigen Koordinatensystem x ist ein in P stationäres kontravariantes Vektorfeld $\xi^i(x)$ gekennzeichnet durch die Gleichung*

$$\delta\xi^i(\overset{\circ}{x}) = -\,\Gamma^i_{kj}(\overset{\circ}{x})\,\xi^k(\overset{\circ}{x})\,\delta x^j$$

mit

$$\Gamma^i_{kj}(\overset{\circ}{x}) = -\,\frac{\delta^2 x^i(\overset{\circ}{\bar{x}})}{\delta\bar{x}^r\,\delta\bar{x}^s}\,\frac{\delta\bar{x}^r(\overset{\circ}{x})}{\delta x^k}\,\frac{\delta\bar{x}^s(\overset{\circ}{x})}{\delta x^i}.$$

[1]) Wir verwenden hier die Bezeichnungen und Ergebnisse aus I [Math. Z. **61**, 100—118 (1954)]. Die Ziffern in eckigen Klammern [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende von I, ebenso Hinweise auf Sätze, z. B. Hilfssatz 2.8.

[2]) B ist ein Banach-Raum. Der Raum selbst sei von der Klasse r mit genügend großem r; $r = 4$ reicht für die §§ 7—9 aus.

Beweis.

$$\delta\xi^i(x) = \delta\left(\frac{\delta x^i(\bar{x})}{\delta \bar{x}^j}\,\bar{\xi}^j\right) = \frac{\delta^2 x^i(\bar{x})}{\delta \bar{x}^j\,\delta \bar{x}^k}\,\bar{\xi}^j\,\delta\bar{x}^k + \frac{\delta x^i(\bar{x})}{\delta \bar{x}^j}\,\delta\bar{\xi}^i(x).$$

An der Stelle P gilt $\delta\xi^i(\mathring{\bar{x}}) = 0$, und daraus folgt die Behauptung.

Γ^i_{kj} heißt Operator des affinen Zusammenhangs. Er ist in jedem Koordinatensystem durch ein in den unteren Indizes symmetrisches Element von B^1_2 dargestellt.

Hilfssatz 7.1. *Das Transformationsgesetz von Γ ist*:

$$\Gamma^l_{ji} = \frac{\delta x^l}{\delta \bar{x}^k}\left(\frac{\delta^2 \bar{x}^k}{\delta x^j\,\delta x^i} + \bar{\Gamma}^k_{sr}\,\frac{\delta \bar{x}^s}{\delta x^j}\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^i}\right)$$

($\bar{x}$ bedeutet dabei wieder ein beliebiges, nicht notwendig geodätisches Koordinatensystem.)

Beweis.

$$\delta\bar{\xi}^k = -\,\bar{\Gamma}^k_{lr}\,\bar{\xi}^l\,\delta\bar{x}^r$$

$$\delta\left(\frac{\delta \bar{x}^k}{\delta x^j}\,\xi\right) = -\,\bar{\Gamma}^k_{lr}\,\frac{\delta \bar{x}^l}{\delta x^j}\,\xi^j\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\,\delta x^t$$

$$\frac{\delta^2 \bar{x}^k}{\delta x^j\,\delta x^t}\,\xi^j\,\delta x^t + \frac{\delta \bar{x}^k}{\delta x^j}\,\delta\xi^j = -\,\bar{\Gamma}^k_{lr}\,\frac{\delta \bar{x}^l}{\delta x^j}\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\,\xi^j\,\delta x^t.$$

Wendet man darauf $\frac{\delta x^l}{\delta \bar{x}^k}$ an, so ergibt sich:

$$\delta\xi^l = -\,\frac{\delta x^l}{\delta \bar{x}^k}\left\{\frac{\delta^2 \bar{x}^k}{\delta x^j\,\delta x^t} + \bar{\Gamma}^k_{sr}\,\frac{\delta \bar{x}^s}{\delta x^j}\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\right\}\xi^j\,\delta x^t.$$

Durch Vergleich mit $\delta\xi^l = -\,\Gamma^l_{jt}\,\xi^j\,\delta x^t$ erhält man die Behauptung nach Anwendung von Hilfssatz 2.8 auf die Differenz dieser beiden Gleichungen.

Wir sagen analog zum Gebrauch im Endlichdimensionalen, daß die Vektoren $\xi^i(P+\delta P)$ in einer infinitesimalen Umgebung von P durch infinitesimale Parallelverschiebung aus $\xi^i(P)$ hervorgehen, wenn $\xi^i(P)$ ein in P stationäres Vektorfeld ist.

§ 8. Parallelverschiebung von Tensoren und kovariante Differentiation.

Die infinitesimale Parallelverschiebung von Tensoren wird durch folgende Definition eingeführt:

Definition. Multilinearformen in Vektoren, welche durch Tensoren gegeben sind, ändern sich bei infinitesimaler Parallelverschiebung nicht.

(„Durch infinitesimale Parallelverschiebung hervorgegangen" ist wiederum ein Synonym für „stationäres Feld".)

Hilfssatz 8.1. *Für die infinitesimale Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors η^i gilt*:

$$\delta\eta_i = \eta_j\,\Gamma^j_{ik}\,\delta x^k.$$

Beweis. Nach der Definition ist bei infinitesimaler Parallelverschiebung:

$$0 = \delta(\eta_i\,\xi^i) = (\delta\eta_k)\,\xi^k - \eta_i\,\Gamma^i_{kj}\,\delta x^j\,\xi^k.$$

Da dies für beliebige ξ^k gilt, folgt die Behauptung aus der Definition der Gleichheit zweier linearer Funktionale.

Satz 8.1. *Für die infinitesimale Parallelverschiebung eines durch* $T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n}$ *dargestellten Tensors gilt*:

$$\delta T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} = \sum_{j=1}^{n} T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots r \dots k_n} \Gamma^r_{k_j k} \, \delta x^k - \sum_{j=1}^{m} T^{i_1 \dots r \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \Gamma^{i_j}_{r k} \, \delta x^k .$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\delta \left(\overset{(1)}{\eta}_{i_1} \dots \overset{(m)}{\eta}_{i_m} T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \underset{(1)}{\xi^{k_1}} \dots \underset{(u)}{\xi^{k_n}} \right) = 0 ,$$

und daraus folgt die Behauptung unter Beachtung der allgemeinen Produktregel (Hilfssatz 4.2, Korollar 1), der Definition der Gleichheit zweier Multilinearformen (§ 2), von Satz 7.1 und von Hilfssatz 8.1.

Hilfssatz 8.1 und Satz 8.1 ermöglichen die Einführung eines kovarianten Differentiationsprozesses.

Definition. Ein in einer offenen Menge eines affin zusammenhängenden Raumes definiertes, stetig differenzierbares Vektorfeld $\xi^i(x)$ ist kovariant differenzierbar, und

$$\frac{\delta^* \xi^i}{\delta x^i} = \xi^i_{;k} = \xi^i_{,k} + \Gamma^i_{jk} \xi^j$$

heißt kovariante Ableitung von $\xi^i(x)$.

Hilfssatz 8.2. *Das „kovariante Differential"* $\delta^* \xi^i = \xi^i_{;k} \, \delta x^k$ *ist die Differenz zwischen Felddifferential im Nachbarpunkt und parallelverschobenem Felddifferential des Ausgangspunktes. Es ist ein kontravarianter Vektor. Die kovariante Ableitung ist ein einfach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der vorangehenden Definition. Es genügt zu zeigen, daß die kovariante Ableitung ein Tensor ist; das bestätigt man durch Rechnung unter Verwendung von Hilfssatz 7.1.

Für die kovariante Differentiation von Tensorfeldern ergibt sich auf die gleiche Weise die Formel:

$$T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n ; l} = T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n , l} + \sum_{j=1}^{m} \Gamma^{i_j}_{r l} T^{i_1 \dots r \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} - \sum_{j=1}^{n} T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots r \dots k_n} \Gamma^r_{k_j l} .$$

Eine zweimal differenzierbare Abbildung $x^i(t)$ eines reellen Intervalles in ein Koordinatensystem des B-lokal-linearen affin zusammenhängenden Raumes stellt eine geodätische oder geradeste Linie dar, wenn der Tangentenvektor $\frac{\delta x^i}{dt} = \dot{x}^i$ bei infinitesimaler Parallelverschiebung längs der Kurve Tangentenvektor bleibt.

Satz 8.2. *Für geodätische Linien ist die Differentialgleichung*

$$\frac{\delta^* \dot{x}^i}{dt} = \frac{\delta^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{\delta x^k}{dt} \frac{\delta x^j}{dt} = 0$$

charakteristisch. Es gibt in jedem Punkt und in jeder Richtung in diesem Punkt in einem affin zusammenhängenden Raum der Klasse 3 genau ein geodätisches Kurvenstück.

Beweis. Die Differentialgleichung ergibt sich aus der Definition. Wir schreiben sie als ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{\delta x^i}{dt} = v^i$$

$$\frac{\delta v^i}{dt} = -\Gamma^i_{kj}(x)\, v^k v^j.$$

Da der Raum von der Klasse drei sein sollte, ist Γ stetig differenzierbar; die rechte Seite der zweiten Gleichung ist also nach x und nach v stetig differenzierbar, genügt also nach Hilfssatz 4.4 einer LIPSCHITZ-Bedingung in einer Umgebung der Anfangsdaten $\mathring{x}, \mathring{v}$ bezüglich der Norm $||x|| + ||v||$ im Produktraum der $\mathfrak{x} = (x, v)$. Wenn wir das System als eine Differentialgleichung

$$\frac{\delta \mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \left(v^i, -\Gamma^i_{kj}(x)\, v^k v^j\right)$$

in diesem Produktraume schreiben, so gilt daher für $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine LIPSCHITZ-Bedingung in einer Umgebung von $\mathring{\mathfrak{x}} = (\mathring{x}, \mathring{v})$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatze von KERNER [3] (HILLE [1, 95]) ergibt sich die Behauptung.

An dieser Stelle ist wesentlich Gebrauch gemacht worden von speziellen Eigenschaften BANACHscher Räume, welche allgemeinen topologischen Räumen nicht notwendig zukommen. An anderer Stelle wird gezeigt, daß es topologische Vektorräume gibt, in denen sogar bei noch stärkeren als den hier gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen nicht gilt.

Hilfssatz 8.3. *Ist $\xi^i(x)$ ein zweimal stetig differenzierbares kontravariantes Vektorfeld, so gilt*

$$\xi^i_{;a;b} - \xi^i_{;b;a} = R^i_{kab}\, \xi^k$$

mit

$$R^i_{kab} = \Gamma^i_{ka,b} - \Gamma^i_{kb,a} + \Gamma^i_{jb}\Gamma^j_{ka} - \Gamma^i_{ja}\Gamma^j_{kb}.$$

Der Beweis ergibt sich durch direkte Ausrechnung.

Korollar. *R^i_{kab} ist ein Tensor, der antimetrisch in a, b ist.* (Denn $\xi^i_{;a;b} - \xi^i_{;b;a}$ hat diese Eigenschaften.)

R ist das Analogon des RIEMANNschen Tensors der endlichdimensionalen Geometrie und soll hier genau so bezeichnet werden. Einige weitere Eigenschaften sind im folgenden Hilfssatz enthalten:

Hilfssatz 8.4.

$$R^i_{kab} + R^i_{abk} + R^i_{bka} = 0$$

$$R^i_{kab;c} + R^i_{kbc;a} + R^i_{kca;b} = 0$$

(*Identität nach* BIANCHI).

Beweis. Beide Identitäten ergeben sich für in P geodätische Systeme sofort aus der Definition von R, da Γ in P verschwindet. Als Tensorgleichungen gelten die Identitäten dann in jedem Koordinatensystem.

Ein Raum mit $R \equiv 0$ heißt eben; dies ist eine invariante Eigenschaft. Für Ebenheit ist hinreichend, daß es ein Koordinatensystem gibt, in welchem Γ identisch verschwindet.

Die geometrische Bedeutung des RIEMANNschen Tensors ist enthalten im:

Hilfssatz 8.5. *Die Änderung des Vektors ξ^i beim Umfahren des von dx^i, δx^k aufgespannten Flächenelementes ist gegeben durch*

$$\Delta \xi^i = R^i_{kab}\, \xi^k\, dx^a\, \delta x^b .$$

Beweis. Wenn ξ^i von x nach $x+dx+\delta x$ über $x+dx$ verschoben wird, ergibt sich für diesen Anteil der Änderung:

$$\left(\xi^i - \Gamma^i_{kj}(x)\, \xi^k\, dx^j\right) - \left(\frac{\delta \Gamma^i_{us}(x)}{\delta x^t}\, dx^t + \Gamma^i_{rs}(x)\right)\left(\xi^r - \Gamma^r_{uv}\, \xi^u\, dx^v\right) \delta x^s .$$

Dann erhält man die gesamte Änderung $\Delta \xi^i$, wenn man hiervon denselben Ausdruck nach Vertauschung von dx und δx subtrahiert:

$$\Delta \xi^i = \left\{ \left(\Gamma^i_{rs}\Gamma^r_{uv} - \Gamma^i_{rv}\Gamma^r_{us}\right) - \left(\frac{\delta \Gamma^i_{us}}{\delta x^v} - \frac{\delta \Gamma^i_{uv}}{\delta x^s}\right)\right\} \xi^u\, dx^v\, \delta x^s .$$

§ 9. Untermannigfaltigkeiten affin zusammenhängender Räume.

In der Einleitung haben wir zwei Postulate für den dimensionsfreien Aufbau einer Geometrie gestellt. Daß Postulat 2 bei unserem Aufbau der Geometrie des affin zusammenhängenden Raumes erfüllt ist, folgt aus dem Inhalt der §§ 7 und 8.

Um nun noch zu zeigen, daß auch Postulat 1 der Einleitung erfüllt ist, müssen wir differenzierbare Untermannigfaltigkeiten B-lokal-linearer Räume betrachten.

Eine ϱ-mal stetig differenzierbare Abbildung

$$x^i = x^i(u^\alpha)$$

eines B'-lokal-linearen Raumes der Klasse r' in einen B-lokal-linearen Raum der Klasse r heißt eine Einbettung, wenn aus

$$\frac{\delta x^i(u)}{\delta u^\alpha}\left(\delta_1 u^\alpha - \delta_2 u^\alpha\right) = 0 \quad \text{folgt} \quad \delta_1 u^\alpha = \delta_2 u^\alpha .$$

Die Menge der $x^i(u^\alpha)$ heißt Fläche, der B-lokal-lineare Raum heißt Einbettungsraum. Die Menge der $\frac{\delta x^i(u)}{\delta u^\alpha}\eta^\alpha$ ist ein linearer Unterraum des Tangentialraumes des Einbettungsraums im Punkte $x^i(u^\alpha)$; wir nennen diesen linearen Raum den Tangentialraum der Fläche. Die Abbildung des Tangentialraums der B'-lokal-linearen Mannigfaltigkeit im Punkte u^α in den Tangentialraum der Fläche im Punkte $x^i(u^\alpha)$ besitzt eine eindeutige Umkehrung $\delta^\alpha_i(u)$, welche wir als stetig voraussetzen. Daraus folgt, daß B' einem Unter-

raum von B linear homöomorph ist; die Topologie von B' ist also mit der von B eine normierbare Topologie.

Satz 9.1. *Für r', $\varrho \geqq 2$ gilt: Wenn der Einbettungsraum einen affinen Zusammenhang Γ^i_{kj} trägt, dann ist auch die Fläche affin zusammenhängend, und der affine Zusammenhang der Fläche ist gegeben durch:*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) = \delta^\alpha_i(u)\left\{\Gamma^i_{kj}[x(u)]\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma} + \frac{\delta^2 x^i(u)}{\delta u^\beta \delta u^\gamma}\right\}.$$

Beweis[3]). $\delta\xi^i = -\Gamma^i_{kj}\,\xi^k\,\delta x^j$ gilt speziell für Flächenvektoren $\xi^k = \frac{\delta x^k(u)}{\delta u^\alpha}\,\xi^\alpha$ und flächenhafte Verschiebungen $\delta x^i = \frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\delta u^\alpha$ und ergibt dann:

$$\delta\xi^i = -\left(\Gamma^i_{kj}\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\right)\xi^\beta\,\delta u^\gamma.$$

Andererseits ist

$$\delta\xi^i = \delta\left(\frac{\delta x^i}{\delta u^\beta}\,\xi^\beta\right) = \frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\beta \delta u^\gamma}\,\xi^\beta\,\delta u^\gamma + \frac{\delta x^i}{\delta u^\beta}\,\delta\xi^\beta,$$

so daß wir haben:

$$\frac{\delta x^i}{\delta u^\beta}\,\delta\xi^\beta = -\left(\Gamma^i_{kj}\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\frac{\delta x^i}{\delta u^\gamma} + \frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\beta \delta u^\gamma}\right)\xi^\beta\,\delta u^\gamma.$$

Auf der linken Seite steht ein Element des Tangentialraumes der Fläche, also auch auf der rechten Seite; wir dürfen daher den Operator δ^α_i anwenden und erhalten die Behauptung.

Es mag darauf hingewiesen werden, daß es nicht ohne weiteres erlaubt ist, die Klammer in dem Ausdruck für $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ aufzulösen, da jeder einzelne der beiden Summanden im allgemeinen einen Wertebereich haben wird, der nicht ganz im Tangentialraum der Fläche liegt.

Satz 9.1 zeigt, daß Postulat 1 der Einleitung wirklich erfüllt ist. Außerdem ersieht man aus diesem Satz, daß es nichttriviale Beispiele von unendlichdimensionalen affin zusammenhängenden Räumen wirklich gibt. Als Einbettungsraum braucht man, um das zu sehen, nur einen BANACH-Raum zu nehmen.

§ 10. Metrische lokal-lineare Räume und Einführung einer RIEMANNschen Metrik.

Ein lokal-linearer Raum soll metrisch heißen, wenn zwischen P und den Punkten P' einer infinitesimalen Umgebung von P ein Abstand $ds = ds(P, P')$ erklärt ist. Sind in einem Koordinatensystem x die Koordinaten von P

[3]) Zur Schreibweise ist zu bemerken: In der Operatorendeutung der Indizessymbolik ist es erlaubt, für den affinen Zusammenhang in Raum und Fläche den gleichen Kernbuchstaben Γ zu verwenden, da die Art der Indizes für die Unterscheidung sorgt. Wenn man im Endlichdimensionalen zur Summationsdeutung zurückkehren will, ist dies nicht mehr möglich, da z.B. Γ^1_{11} ganz verschiedene Zahlenwerte besitzen wird, je nachdem ob es sich um den affinen Zusammenhang des Raumes oder den der Fläche handelt. — Aus dem gleichen Grunde dürfen wir hier auch schreiben $\xi^k = \frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\xi^\alpha$.

bzw. P' gegeben durch x bzw. $x+\delta x$, so soll gelten:

$$ds = F(x; \delta x),$$

wobei $F(x; \delta x)$ positiv-definit und in δx von erster Ordnung positiv homogen ist. Diesen Ansatz hat für den endlichdimensionalen Fall bereits RIEMANN in seiner Habilitationsvorlesung begründet.

Man überzeugt sich sofort davon, daß differenzierbare Untermannigfaltigkeiten metrischer Räume wiederum metrische Räume sind.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf die Untersuchung derjenigen metrischen Räume, die den klassischen RIEMANNschen Räumen entsprechen. Dazu legen wir einen B-lokal-linearen Raum (B BANACHsch) genügend hoher Klasse r zugrunde und postulieren:

1. Der Abstand infinitesimal benachbarter Punkte ist gegeben durch

$$ds = F(x; \delta x) = (g_{ik}(x)\, \delta x^i\, \delta x^k)^{\frac{1}{2}} \qquad (g_{ik} = g_{ki},\ g_{ik}\xi^i\xi^k \text{ positiv-definit}).$$

2. Die stetige lineare Abbildung $u_i = g_{ik}(x)\,\xi^k$ von B auf $U \subseteq B_1$ besitzt eine in U definierte, stetige und eindeutige Umkehrung $\xi^i = G(u)$. (Diese ist dann natürlich linear.)

Satz 10.1. *Wenn eine B-lokal-lineare Mannigfaltigkeit ein* RIEMANN*scher Raum ist, dann ist die Normtopologie von B euklidisch; es ist notwendig $U = B_1$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.3.

Hilfssatz 10.1. *$(g_{ik}(x)\,\xi^i\,\xi^k)^{\frac{1}{2}}$ ist für jedes x eine Norm aus der Normtopologie von B.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.2.

Korollar. *Es gibt B-lokal-lineare Räume beliebiger unendlicher Dimension, in denen sogar im Kleinen keine* RIEMANN*sche Metrik eingeführt werden kann.*

Denn es gibt dann stets nicht-euklidische Normtopologien[4]).

Es ist merkwürdig, daß man nicht weitere Räume mit RIEMANNschen Metriken ausstatten kann, wenn man für die kovarianten Vektoren nur eine Untermannigfaltigkeit der Menge B_1 heranzieht; denn der Wertebereich U von $g_{ik}\xi^k$ fällt nach dem Bewiesenen stets mit B_1 zusammen. Dies zeigt, daß die Axiome von MICHAL für eine RIEMANNsche Geometrie in BANACH-Räumen nicht unabhängig voneinander sind (MICHAL [4, 551]). Tatsächlich zeigt Satz 10.1, daß der Tangentialraum eines RIEMANNschen Raumes stets zu einem HILBERT-Raum linear homöomorph ist.

Es sei hier erwähnt, daß sich an dieser Stelle ein Zugang zu einem dimensionsfreien Aufbau der FINSLERschen Geometrie eröffnet. Man wird die lokale Metrik F dann als eine beliebige, nicht notwendig euklidische Norm aus der Normtopologie von B zu wählen haben.

Da die Umkehrung von $g_{ik}(x)\,\xi^k$ über dem ganzen Raum B_1 definiert ist, stetig ist und als Wertebereich den ganzen Raum B hat, wird diese Um-

[4]) Vgl. dazu die demnächst im Arch. der Math. erscheinende Arbeit des Verf.: „Über vollständige Normtopologien."

kehrung durch ein Element von B^2 repräsentiert und darf geschrieben werden

$$\xi^k = g^{kj}(x)\, u_j.$$

Es gilt

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k.$$

Hilfssatz 10.2. *g^{ij} stellt einen zweifach kontravarianten Tensor dar und ist symmetrisch in i, j.*

Beweis. Schreiben wir von jetzt an ξ_i für $g_{ik}(x)\, \xi^k$, so gilt

$$\bar{g}^{ij}\bar{\xi}_i\bar{\eta}_j = \bar{\xi}_i\bar{\eta}^i = \bar{g}_{ik}\bar{\eta}^i\bar{\xi}^k = g_{ik}\eta^i\xi^k = \xi_i\eta^i = g^{ij}\xi_i\eta_j.$$

g^{ij} definiert also eine invariante Bilinearform über $\mathfrak{T}_1$, und nach der Definition 2 aus § 6 folgt daraus die Tensoreigenschaft, da die Bedingung $g^{ij} \in B^2$ erfüllt ist. Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von g_{ik}:

$$g^{ij}\xi_i\eta_j = g_{ik}\xi^k\eta^i = g_{ik}\xi^i\eta^k = g^{ij}\xi_j\eta_i.$$

Die RIEMANNsche Metrik g_{ik} kann auch für die Winkelmessung verwendet werden. Der Kosinus des Winkels zwischen ξ^i und η^i ist gegeben durch

$$\frac{g_{ik}\xi^i\eta^k}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}\sqrt{g_{ik}\eta^i\eta^k}}.$$

Dies ist dem Betrage nach höchstens gleich 1. Denn g_{ik} macht den zweidimensionalen, von ξ^i und η^i aufgespannten linearen Raum zu einem euklidischen, und für euklidische Ebenen ist dies bekannt. Eine entsprechende Argumentation ergibt auch, daß die „GRAMsche" Determinante von n Vektoren $\xi^i_{(1)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$ [5])

$$G_{(n)} = \begin{vmatrix} g_{ik}(x)\,\xi^i_{(1)}\xi^k_{(1)} & g_{ik}\xi^i_{(1)}\xi^k_{(2)} & \cdots & g_{ik}\xi^i_{(1)}\xi^k_{(n)} \\ \vdots & & \cdots & \\ g_{ik}\xi^i_{(n)}\xi^k_{(1)} & & \cdots & g_{ik}\xi^i_{(n)}\xi^k_{(n)} \end{vmatrix}$$

positiv ist, wenn die Vektoren linear unabhängig sind, und sonst verschwindet. Denn in dem von den n Vektoren aufgespannten euklidischen Raum der Dimension $m \leqq n$ ist dies bekannt. Ebenso sieht man, daß sich aus n linear unabhängigen Vektoren n neue gewinnen lassen:

$$\eta^i_{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{G_{(\nu-1)}\, G_{(\nu)}}} \begin{vmatrix} g_{ik}\xi^i_{(1)}\xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik}\xi^i_{(1)}\xi^k_{(\nu-1)} & \xi^i_{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{ik}\xi^i_{(\nu)}\xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik}\xi^i_{(\nu)}\xi^k_{(\nu-1)} & \xi^i_{(\nu)} \end{vmatrix}.$$

Die $\eta^i_{(\nu)}$ sind orthonormiert, d.h. $g_{ik}\eta^i_{(\mu)}\eta^k_{(\nu)} = \delta_{(\mu\nu)}$. (SCHMIDTsche Orthogonalisierung.)

Eine ausgezeichnete, „cartesische" Metrik (δ_{ik} entsprechend) gibt es im allgemeinen natürlich nicht; alle quadratischen Formen $g_{ik}(x)\,\xi^i\xi^k$, die eine Norm aus der Normtopologie von B definieren, sind gleichberechtigt. Geometrisch besteht eine Auszeichnung der δ_{ik}-Metrik ja auch im Endlich-

[5]) Eingeklammerte Indizes haben keine Bedeutung in der Operationskonvention, sondern sind Nummern.

dimensionalen nicht. Gewisse rechnerische Vereinfachungen, die gewöhnlich mit Hilfe der δ_{ik}-Metrik durchgeführt werden können, sind im allgemeinen nicht möglich.

§ 11. Grundlagen der RIEMANNschen Geometrie.

Von jetzt an soll das metrische Feld $g_{ik}(x)$ hinreichend oft differenzierbar sein (in diesem Paragraphen genügt zweimalige Differenzierbarkeit). Der Raum soll von der Klasse $r \geq 2$ sein.

Satz 11.1. *In einem* RIEMANNschen *Raum gibt es genau einen affinen Zusammenhang, der Vektorlängen bei Parallelverschiebung ungeändert läßt. Dieser läßt dann auch die Winkel ungeändert und ist gegeben durch*

$$\Gamma_{kj}^{i}(x) = \frac{g^{il}(x)}{2}\left\{\frac{\delta g_{lk}(x)}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{kj}(x)}{\delta x^l} + \frac{\delta g_{lj}}{\delta x^k}\right\}.$$

Unter Beachtung der Definition des Verschwindens eines linearen Funktionals und des Hilfssatzes 3.2 kann der Beweis analog zum endlichdimensionalen Fall geführt werden. (Zum Beispiel WEYL [*1*], Kap. II.)

Also ist nach Vorgabe der Metrik auch ein eindeutiger kovarianter Differentiationsprozeß bestimmt.

Hilfssatz 11.1. (*Lemma nach* RICCI) $\frac{\delta^* g_{ik}}{\delta x_l} \equiv 0$.

Beweis.

$$\frac{\delta^* g_{ik}}{\delta x^l} = \frac{\delta g_{ik}}{\delta x^l} - g_{ir}\Gamma_{kj}^{r} - g_{rk}\Gamma_{kj}^{r}.$$

Dies ist nach Satz 11.1 identisch Null.

Da der RIEMANNsche Raum ein affin zusammenhängender Raum ist, ist der RIEMANNsche Tensor wie in § 8 erklärbar. Hier kann man auch das Analogon des Krümmungsskalars einführen.

Eine Fläche in einem RIEMANNschen Raum wird wie in § 9 definiert durch eine Einbettungsgleichung $x^i = x^i(u^\alpha)$ mit den dort verlangten Eigenschaften. (Bezeichnungen s. § 9.)

Satz 11.2. *Jede Fläche in einem* RIEMANNschen *Raum ist selbst ein* RIEMANNscher *Raum, dessen nach Satz* 11.1 *definierter affiner Zusammenhang gleich dem nach* § 9 *durch den affinen Zusammenhang des Einbettungsraumes induzierten affinen Zusammenhang ist.*

Beweis.

$$ds^2 = g_{ik}(x(u))\,\delta x^i\,\delta x^k = g_{ik}(x(u))\,\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\,\delta u^\alpha\,\delta u^\beta,\quad g_{\alpha\beta}(u) = g_{ik}(x)\,\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}$$

ist eine positiv-definite, symmetrische quadratische Form über dem Tangentialraum der Fläche, die dort eine aus der Normtopologie dieses Raumes stammende Norm definiert, da $\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}$ samt seiner Umkehrung stetig, also beschränkt ist. Daher ist durch $g_{\alpha\beta}$ eine RIEMANNsche Metrik mit nach Hilfssatz 4.2 gegebenen Differenzierbarkeitseigenschaften in der Fläche ein-

geführt. Es gilt

$$g^{\alpha\beta}(u) = g^{ij}\,\delta_i^\alpha\,\delta_j^\beta, \quad \text{denn} \quad g^{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma} = g^{ij}\,\delta_i^\alpha\,\delta_j^\beta\,g_{rk}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha.$$

Es ist der affine Zusammenhang dieses RIEMANNschen Raumes zu berechnen:

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta u^\gamma} = \frac{\delta g_{ik}}{\delta x_j}\,\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta} + 2\,g_{ik}\,\frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\alpha\,\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \frac{g^{\delta\gamma}}{2}\left\{\frac{\delta g_{\alpha\gamma}}{\delta u^\beta} - \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta u^\gamma} + \frac{\delta g_{\beta\gamma}}{\delta u^\alpha}\right\} = g^{il}\,\delta_i^\delta\,\delta_l^\gamma\,\Gamma_{j,kr}\,\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta}$$

$$- g^{ij}\,\delta_i^\delta\,\delta_j^\gamma\,g_{sk}\left\{\frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\alpha\,\delta u^\beta}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\gamma} - \frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\alpha\,\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta} + \frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\beta\,\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\right\}.$$

Die beiden letzten Glieder können zusammengefaßt werden, da alles übrige symmetrisch in α, β ist; sie müssen sich nämlich wegheben, da sie zusammen schiefsymmetrisch in α, β sind, andererseits aber einem in α, β symmetrischen Ausdruck gleich sein sollen. Damit bleibt:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = g^{il}\,\delta_i^\delta\left(\delta_l^\gamma\,\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\right)\Gamma_{j,kr}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta} + g^{ij}\,\delta_i^\delta\left(\delta_j^\gamma\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\gamma}\right)g_{sk}\,\frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\alpha\,\delta u^\beta}.$$

Dies ist aber die Formel für den induzierten Zusammenhang (Satz 9.1):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \delta_i^\delta\left\{\Gamma_{kr}^i\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta} + \frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\alpha\,\delta u^\beta}\right\}.$$

Aus diesem Satz folgt die Existenz nicht-trivialer Beispiele von RIEMANNschen Räumen beliebiger Dimension als Flächen in HILBERT-Räumen. — Man berechnet, daß Kugeln in HILBERT-Räumen konstantes Krümmungsmaß haben.

§ 12. Kurven in RIEMANNschen Räumen.

In diesem Paragraphen wollen wir das bisher Entwickelte zur Behandlung spezieller geometrischer Probleme verwenden, und zwar werden wir die Kurventheorie diskutieren.

Wenn in der Definition der Fläche (§ 9) der B'-lokal-lineare Raum speziell ein offenes reelles Intervall ist, dann sprechen wir von einer Kurve $x^i(t)$. Der Tangentialraum der Kurve besteht aus einer einzigen Geraden, die durch den Tangentenvektor $\xi^i(t) = \frac{\delta^* x(t)}{dt}$ beschrieben wird. Es wird vorausgesetzt, daß dessen Länge

$$\sqrt{g_{ik}(x)\,\xi^i(t)\,\xi^k(t)} = A(t)$$

von Null verschieden ist; das entspricht der für Flächen allgemein gestellten Forderung, daß aus $\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\delta u^\alpha = 0$ folgen soll $\delta u^\alpha = 0$. Durch $s = s(t)$ mit

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau$$

führen wir auf der Kurve einen neuen Parameter s mit der invarianten Eigenschaft ein, daß

$$g_{ik}(x)\,\frac{\delta x^i}{ds}\,\frac{\delta x^k}{ds} = 1.$$

Dieser ausgezeichnete Parameter führe wie üblich den Namen „Bogenlänge". Wenn nichts anderes bemerkt ist, sollen alle vorkommenden Kurven auf den Parameter Bogenlänge bezogen sein.

Es kann nach den Kurven stationärer Länge gefragt werden, die zwei vorgegebene Punkte (Koordinaten x_0 und x_1) verbinden. Das führt auf das Variationsproblem

$$\delta \int_{x_1}^{x_0} ds = 0,$$

dessen Lösung nach Hilfssatz 4.8 äquivalent ist mit der Lösung der zugehörigen („EULERschen") Differentialgleichung

$$\frac{\delta \sqrt{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k}}{\delta x^l} - \frac{d}{ds}\frac{\delta \sqrt{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k}}{\delta \dot{x}^l} = 0 \qquad \left(\cdot \text{ für } \frac{\delta}{ds}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\ }}\frac{\delta g_{ik}}{\delta x^l}\dot{x}^i\,\dot{x}^k - \frac{\delta}{ds}\frac{1}{\sqrt{\ }}g_{ij}\,\dot{x}^i = 0$$

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kj}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der geodätischen Linien (§ 8). Die geradesten Linien sind also wie in der klassischen RIEMANNschen Geometrie zugleich die kürzesten.

Von nun an wollen wir annehmen, daß der Raum unendlichdimensional sei, und daß das metrische Feld unendlich oft differenzierbar sei; diese Voraussetzung ist im HILBERT-Raum (g_{ik} konstant) trivialerweise erfüllt.

Existieren die p ($p \leq \infty$) ersten Ableitungen von $x^i(s)$, so ist mit der Kurve ein invariantes begleitendes Vektorgerüst gegeben durch

$$\xi^i_{(n)}(s) = \frac{\delta^* \xi^i_{(n-1)}(s)}{ds}; \qquad \xi^i_{(1)}(s) = \xi^i(s) = \frac{\delta x^i}{ds}.$$

Von den $\xi^i_{(n)}$ seien die ersten q ($q \leq p$) linear unabhängig. Dann kann man auf sie das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren (§ 10) anwenden und erhält ($G_{(m)}$ bezeichnet die m-te GRAMsche Determinante; $G_{(0)} = 1$)

$$\eta^i_{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{G_{(n-1)}(s)\,G_n(s)}} \begin{vmatrix} g_{ik}(x(s))\,\xi^i_{(1)}\,\xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik}(x(s))\,\xi^i_{(1)}\,\xi^k_{(n-1)}\,\xi^j_{(1)}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{ik}(x(s))\,\xi^i_{(n)}\,\xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik}(x(s))\,\xi^i_{(n)}\,\xi^k_{(n-1)}\,\xi^j_{(n)}(s) \end{vmatrix}.$$

Wir setzen jetzt $p = q = \infty$ voraus und erhalten $\eta^i_{(k)}$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Da $\eta^i_{(k)}$ ein Linearkompositum der $\xi_{(j)}$ ($j = 1, \ldots, k$) ist, kann man $\frac{\delta^* \eta_{(k)}}{ds}$ jedenfalls linear aus den $\xi_{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, k+1$) kombinieren. Damit haben wir die Fundamentalformeln der Kurventheorie:

$$\frac{\delta^* \eta^i_{(k)}}{ds} = \sum_{j=1}^{k+1} \varkappa_{(kj)}(s)\,\eta^i_{(j)}(s).$$

Es gilt wegen der Orthonormalität der $\eta_{(j)}$:

$$0 = \delta^*(g_{ik}\eta^i_{(j)}\eta^k_{(l)}) = g_{ik}(x(s))\frac{\delta^*\eta^i_{(j)}}{ds}\eta^k_{(l)} + g_{ik}(x(s))\eta^i_{(j)}\frac{\delta^*\eta^k_{(l)}}{ds} = \varkappa_{(jl)} + \varkappa_{(lj)}.$$

(nach dem Riccischen Lemma, § 11).

Die Matrix der Krümmungen $\varkappa_{(jl)}$ ist also schiefsymmetrisch, und da für $l \geqq j+2$ gilt $\varkappa_{(jl)} = 0$, sind höchstens in den beiden Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente vorhanden. Wir schreiben $\varkappa_{(j)}$ für $\varkappa_{(j,j+1)} = -\varkappa_{(j+1,j)}$ und haben die verallgemeinerten Frenetschen Formeln:

$$\frac{\delta^*}{ds}\eta^i_{(j)} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)}, \qquad \varkappa_{(0)} = 0, \qquad \varkappa_{(m)} = g_{ik}\frac{\delta^*\eta^i_{(m)}}{ds}\eta^k_{(m+1)}.$$

Die Krümmungen sind Invarianten der Kurve, wie man schon an der Darstellung $g_{ik}\frac{\delta^*\eta^i_{(m)}}{ds}\eta^k_{(m+1)}$ erkennt. Sie können sogar explizit berechnet werden. Wegen $\xi_{(n+1)} = \frac{\delta^*\xi_{(n)}}{ds}$ gilt

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}\xi^i_{(m)}\xi^k_{(n)}) = g_{ik}\xi^i_{(m+1)}\xi^k_{(n)} + g_{ik}\xi^i_{(m)}\xi^k_{(n+1)}.$$

Die kovariante Differentiation der Definitionsgleichung von $\eta^i_{(l)}$ nach s ergibt einen Ausdruck, dessen Skalarprodukt mit $\eta^i_{(l+1)}$ wie bei Blaschke, Math. Z. **6**, 98 (1921) als $\frac{\sqrt{G_{(l-1)}G_{(l+1)}}}{G_{(l)}}$ erwiesen wird.

Man beachte, daß bei der Definition der Normalen mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens die Krümmungen $\varkappa_{(j)}$ automatisch positiv sind.

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Satz 12.1. *In einem unendlichdimensionalen* Riemannschen *Raum mit unendlich oft differenzierbarem metrischem Feld gilt für eine unendlich oft differenzierbare Kurve, deren Ableitungen linear unabhängig sind:*

$$\frac{\delta^*\eta^i_{(j)}}{ds} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)} \qquad (\varkappa_0 = 0)$$

mit $\varkappa_{(m)} = \frac{\sqrt{G_{(m+1)}G_{(m-1)}}}{G_{(m)}} > 0$. Die Krümmungen $\varkappa_{(m)}$ sind unendlich oft differenzierbare Funktionen von s.

(Die letzte Aussage folgt aus der Differenzierbarkeit der Vektoren $\xi^i_{(n)}$ und dem Nichtverschwinden der Gramschen Determinanten.)

Dieses Ergebnis ist für den speziellen Fall des euklidischen, $\aleph_0$-dimensionalen Raumes der stetigen reellwertigen Funktionen über einem reellen Intervall unter dem Skalarprodukt $\int f g\, dx$ von G. Kowalewski [*1*] erhalten worden.

Dieses Invariantensystem ist vollständig, wie aus dem nachfolgenden Satz folgt.

Satz 12.2. *Es seien positive stetige Funktionen $\varkappa_n(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vorgegeben mit folgenden Eigenschaften: a) Es gibt ein M so, daß $|\varkappa_n(s)| \leq M$ für*

alle n, s; b) aus $|s-s_0| \to 0$ folgt $\sup_n |\varkappa_n(s)-\varkappa_n(s_0)| \to 0$. Dann gibt es höchstens eine Kurve $x(s)$, die bei vorgegebenem Anfangspunkt $x^i(s_0)=\overset{\circ}{x}$ und vorgegebenem orthonormalen Vektorgerüst $\overset{\circ}{\eta}{}^i_{(n)}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ die $\varkappa_n(s)$ als Krümmungen und die $\overset{\circ}{\eta}{}^i_{(n)}$ als Normalenvektoren in $\overset{\circ}{x}$ hat.

Beweis. Wir fassen das unendliche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\delta^* \eta^i_{(j)}}{ds} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)}; \qquad \frac{\delta x^i}{ds} = \eta^i_{(1)}(s)$$

oder

$$\frac{\delta \eta^i_{(j)}}{ds} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)} - \Gamma^i_{kr}\left(x(s)\right)\eta^k_{(1)}(s)\,\eta^r_{(j)}(s); \qquad \frac{\delta x^i}{ds} = \eta^i_{(1)}(s)$$

auf als eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung im Raume $\mathfrak{B}$, dessen Elemente die unendlichen Vektoren

$$\mathfrak{y} = \{\eta^i_{(0)}, \eta^i_{(1)}, \eta^i_{(2)}, \ldots\}; \qquad \sup_n ||\eta^i_{(n)}|| < \infty; \qquad x^i = \eta^i_{(0)}$$

sind und in dem eine Norm eingeführt ist durch $||\mathfrak{y}|| = \sup_{n=0}^{\infty} ||\eta_{(n)}||$. Dieser Raum $\mathfrak{B}$ ist ein BANACH-Raum, da der ursprüngliche Raum diese Eigenschaft hatte. Das Differentialgleichungssystem der Fundamentalformeln schreiben wir in $\mathfrak{B}$:

$$\frac{\delta \mathfrak{y}(s)}{ds} = K(s)\,\mathfrak{y}(s) - \Gamma\left(\mathfrak{y}(s)\right).$$

Dabei bedeutet $K(s)$ die Matrix:

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\varkappa_2 & 0 & \varkappa_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Diese stellt einen durch $\max\{2M, 1\}$ beschränkten linearen Operator in $\mathfrak{B}$ dar, da

$$||K(s)\,\mathfrak{y}(s)|| = \sup_n \{||-\varkappa_{(n-1)}\eta_{(n-1)} + \varkappa_{(n)}\eta_{(n+1)}||,$$

$$||\eta_1||\} \leq \max\{2M, 1\} \sup_{n=0}^{\infty} ||\eta_{(n)}||.$$

$\Gamma(\mathfrak{y})$ bedeutet den Vektor mit den Komponenten:

$$\{0,\ \Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}\eta^j_{(1)}, \ldots, \Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}\eta^j_{(n)}, \ldots\}.$$

Die Gültigkeit einer LIPSCHITZ-Bedingung für $\Gamma(\mathfrak{y})$ in einer Umgebung der Anfangsbedingung $\overset{\circ}{\mathfrak{y}}$ ergibt sich daraus, daß $\Gamma^i_{kj}(\overset{\circ}{\eta}_{(0)})\,\eta^k_{(1)}$ in einer Umgebung von $\overset{\circ}{\mathfrak{y}}$ nach Hilfssatz 2.2 eine gleichmäßige obere Schranke $\tilde{M}$ besitzt:

$$\sup_n ||\Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}\eta^j_{(n)} - \Gamma^i_{kj}(\tilde{\eta}_{(0)})\,\tilde{\eta}^k_{(1)}\tilde{\eta}^j_{(n)}|| \leq \sup ||\Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}(\eta^j_{(n)} - \tilde{\eta}^j_{(n)})|| +$$

$$+ \sup ||(\Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta_{(1)} - \Gamma^i_{kj}(\tilde{\eta}_{(0)})\,\tilde{\eta}_{(1)})\,\tilde{\eta}_{(n)}|| \leq (\tilde{M} + L \cdot ||\tilde{\mathfrak{y}}||) \sup_n ||\eta^i_{(n)} - \tilde{\eta}^i_{(n)}||.$$

Der erste Summand $K(s)\,\mathfrak{y}(s)$ genügt sogar gleichmäßig im ganzen Intervall einer LIPSCHITZ-Bedingung, da $K(s)$ ein gleichmäßig beschränkter linearer Operator ist, der $\mathfrak{B}$ in sich abbildet; die Stetigkeit in s bezüglich der Norm von $\mathfrak{B}$ ist nach der Voraussetzung b) gesichert. Aus alledem folgt nach dem Satz von KERNER [3] (HILLE [1, 95]) die Existenz und Eindeutigkeit eines Lösungsvektors $\mathfrak{y}(s)$ in einem an s_0 anschließenden Intervall für die vorgegebene Anfangsbedingung $\overset{0}{\mathfrak{y}}$. (Damit ist nicht gesagt, daß es nicht Lösungen geben könnte, welche nicht in $\mathfrak{B}$ liegen. Solche Lösungen interessieren uns aber hier nicht, da für Kurven jedenfalls $||\eta_{(n)}|| = 1$ für $n \geq 1$, also $||\mathfrak{y}|| = \max\{1, ||\eta_{(0)}||\}$ sein muß, so daß der Vektor

$$\mathfrak{y} = \{\eta_{(0)}, \eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \ldots\}$$

in $\mathfrak{B}$ liegt.)

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von KERNER liefert die Behauptung.

Satz 12.2 besagt, daß die *abzählbar* unendlich vielen Krümmungen unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen ein vollständiges Invariantensystem für eine Kurve bilden. Das gilt auch dann, wenn der Raum selbst von überabzählbarer Dimensionszahl ist. Die Merkwürdigkeit dieses Ergebnisses zeigt sich besonders deutlich, wenn der RIEMANNsche Raum speziell ein HILBERT-Raum ist ($\Gamma \equiv 0$). Denn dann besagt der Satz, daß eine Kurve den von ihrem Anfangsvektorgerüst aufgespannten abzählbardimensionalen Unterraum niemals verläßt. Dieses Resultat ist ein duales Gegenstück zu dem Satz, daß in einem HILBERT-Raum für jeden Vektor höchstens abzählbar viele FOURIER-Koeffizienten von Null verschieden sind.

GREENWOOD [1] hat die KOWALEWSKIschen Fundamentalformen im Raum der stetigen Funktionen diskutiert unter der Annahme, daß alle Krümmungen $\varkappa_{(j)}(s)$ konstant sind. Er kommt dabei zu dem Schluß, daß im HILBERT-Raum von $\aleph_0$ Dimensionen der Satz nicht mehr wahr sei, daß die Krümmungen eine Kurve bis auf Bewegungen festlegten. Unter Bewegungen versteht GREENWOOD dabei isometrische lineare Abbildungen des HILBERT-Raumes auf sich. Satz 12.2 ermöglicht es, sein Gegenbeispiel zu durchschauen. Man wähle als abzählbardimensionalen HILBERT-Raum H_1 den von den Normalen $\eta_{(n)}(s_0)$ einer beliebigen Kurve aufgespannten Raum und als HILBERT-Raum H_2 den von irgendeiner echten unendlichen Teilfolge $\tilde{\eta}_k = \eta_{n_k}$ aufgespannten echten Unterraum von H_1; dann gibt es in H_2 eine Kurve mit denselben Krümmungen und dem Anfangsvektorgerüst, das durch die geordnete Teilfolge gegeben ist. Aber die isometrische lineare Abbildung von H_1 auf H_2, welche durch $F\,\eta_k = \tilde{\eta}_k$ vermittelt wird, ist im Sinne von GREENWOOD keine Bewegung.

Dieser GREENWOODsche Bewegungsbegriff ist aber nicht sehr sinnvoll. Ist H_1 nämlich in einem HILBERT-Raum H eingebettet, in dem es unendlich viele von H_1 linear unabhängige Vektoren gibt, dann gibt es Bewegungen im Sinne von GREENWOOD von H, welche H_1 in H_2 und die eine der betrachteten Kurven in die andere überführen. Man sollte unter einer Bewegung (wobei von Orientierung abgesehen wird) lieber eine isometrische lineare Abbildung

verstehen; dies ist auch eine Verallgemeinerung der endlichdimensionalen Definition, und dabei wird das bei GREENWOOD mögliche Vorkommnis vermieden, daß zwei Mengen, die in einem Raum nicht durch Bewegungen ineinander übergeführt werden können, in einem einbettenden Raume doch ineinander bewegbar werden. Bei dieser Definition können wir dann den Inhalt von Satz 12.2 auch so aussprechen, daß die Krümmungen eine Kurve gerade bis auf Bewegungen festlegen. Um eine solche Bewegung für Kurven mit gleichen Krümmungen in einem HILBERT-Raum zu erhalten, braucht man nur die durch die eindeutige, geordnete Zuordnung der Anfangsvektorgerüste gegebene lineare Abbildung zu nehmen.

Der folgende Satz zeigt, daß die Krümmungen unabhängige Invarianten der Kurve sind.

Satz 12.3. *Es seien für $s_0 \leqq s \leqq s_1$ abzählbar unendlich viele positive, unendlich oft differenzierbare Funktionen $\varkappa_{(n)}(s)$ vorgegeben, für welche die Voraussetzungen von Satz 12.2 zutreffen, ferner abzählbar unendlich viele Orthonormalvektoren $\mathring{\eta}^i_{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\mathring{x}^i$. Dann gibt es stets eine Kurve $x^i(s)$ mit $x^i(s_0) = \mathring{x}^i$, deren Krümmungen die $\varkappa_{(n)}(s)$ sind und deren Normalengerüst für $s = s_0$ durch die $\mathring{\eta}^i_{(n)}$ gegeben ist.*

Beweis. Wie im Beweise zu Satz 12.2 erhält man jedenfalls einen Lösungsvektor $\mathfrak{y}(s) = \{x(s), \tilde{\eta}_{(1)}(s), \tilde{\eta}_{(2)}(s), \ldots\}$, der in $\mathfrak{B}$ gelegen ist und für $s = s_0$ die Anfangsbedingung erfüllt. Die $\tilde{\eta}_{(n)}(s)$ bilden nicht nur für $s = s_0$, sondern für alle s ein Orthonormalsystem, wie man folgendermaßen einsieht:

$$\frac{\delta}{ds}\left(g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\tilde{\eta}^k_{(n)}\right) = g_{ik}(x)\,\frac{\delta^*\tilde{\eta}^i_{(m)}}{ds}\,\tilde{\eta}^k_{(n)} + g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\,\frac{\delta^*\tilde{\eta}^i_{(n)}}{ds}.$$

$$= \sum_r \varkappa_{(mr)}\left(g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(r)}\tilde{\eta}^k_{(n)}\right) + \sum_r \varkappa_{(nr)}\,g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\tilde{\eta}^k_{(r)}.$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für die Matrix $\left(a_{(mn)}(s)\right) = \left(g_{ik}(x(s))\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\,\tilde{\eta}^k_{(n)}\right)$ mit der Anfangsbedingung $a_{(mn)}(s_0) = \delta_{(mn)}$. Mit $\|(a_{(mn)})\| = \sup_{m,n} |a_{(mn)}|$ gilt, daß die rechte Seite dieser Differentialgleichung einer LIPSCHITZ-Bedingung mit der Konstanten $4M$ genügt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Krümmungen sind auch die als Koeffizientenmatrizen auftretenden Krümmungsmatrizen in dem so normierten Matrixraum stetige Funktionen von s. Daraus folgt wieder nach dem KERNERschen Satze die Eindeutigkeit der Lösung, und da $a_{(mn)}(s) = \delta_{(mn)}$ wegen der Schiefsymmetrie der $\varkappa_{(mn)}$ eine Lösung ist, ist es die einzige.

Ist $\mathfrak{y}(s) \in \mathfrak{B}$ der nach dem Beweise zu Satz 12.2 konstruierte Lösungsvektor der Fundamentalformeln, so gilt für ihn:

$$\|\mathfrak{y}(s)\| = \sup_n \|\tilde{\eta}_{(n)}(s)\| = A(s) < \infty,$$

also

$$\sup_{m,n} \left|\left(g_{ik}(x(s))\,\tilde{\eta}^i_{(m)}(s)\,\tilde{\eta}^k_{(n)}(s)\right)\right| \leqq \|g_{ik}(s)\| \cdot \sup_{m,n} \|\tilde{\eta}^i_{(m)}(s)\| \cdot \|\tilde{\eta}^k_{(n)}(s)\|$$

$$= \|g_{ik}\| \cdot A^2 < \infty;$$

diese Matrix liegt also für alle s in dem Matrizenraum. Da sie auch die Anfangsbedingungen und die Matrixdifferentialgleichung erfüllt, folgt wegen der Eindeutigkeit:

$$g_{ik}\left(x(s)\right)\tilde{\eta}^{i}_{(m)}(s)\,\tilde{\eta}^{k}_{(n)}(s) \equiv \delta_{(m\,n,} \qquad \text{für alle } m, n, s.$$

Die $\tilde{\eta}^{i}_{(n)}(s)$ bilden also ein Orthonormalsystem.

Wir müssen nun noch zeigen, daß die $\tilde{\imath}^{i}_{(n)}$ das begleitende Vektorgerüst der Kurve $x^{i}(s)$ darstellen und daß die $\varkappa_{(n)}(s)$ deren Krümmungen sind. Zunächst bemerken wir, daß $x^{i}(s)$ wegen des Bestehens des Differentialgleichungssystems der Fundamentalformeln unendlich oft differenzierbar ist, da g_{ik} und damit Γ diese Eigenschaft hat. Wir berechnen die kovarianten Ableitungen von $x^{i}(s)$:

$$\xi_{(1)}(s) = \frac{\delta^{*}x(s)}{ds} = \frac{\delta x(s)}{ds} = \tilde{\eta}_{(1)}(s),$$

$$\xi_{(2)}(s) = \frac{\delta^{*}\xi_{(1)}(s)}{ds} = \varkappa_{(1)}(s)\,\tilde{\eta}_{(2)}(s),$$

$$\xi_{(3)}(s) = \frac{\delta^{*}\xi_{(2)}(s)}{ds} = \varkappa'_{(1)}(s)\,\tilde{\imath}_{(2)}(s) + \varkappa_{(1)}(s)\left\{-\,\varkappa_{(1)}(s)\,\tilde{\eta}_{(1)}(s) + \varkappa_{(2)}(s)\,\eta_{(3)}(s)\right\}.$$

$$\vdots$$

Bezeichnen wir wieder mit $\eta^{i}_{(n)}$ die durch Schmidtsche Orthogonalisierung aus den $\xi^{i}_{(n)}$ gewonnenen Normalenvektoren von $x(s)$, so muß jedenfalls gelten

$$\tilde{\eta}_{(n)}(s) = (-1)^{\delta_{(n)}}\eta_{(n)}(s).$$

Denn nach den Ausdrücken für die $\xi_{(n)}$ sind auch die $\eta_{(n)}$ Orthonormalvektoren mit der Eigenschaft, daß jeweils der n-te von ihnen sich aus den $\xi_{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ linear kombinieren läßt, da der Koeffizient von $\eta_{(n)}$ im Ausdruck für $\xi_{(n)}$ wegen $\varkappa_{\nu}(s) > 0$ nicht verschwindet.

Die zu $x(s)$ gehörigen Krümmungen sind definiert durch

$$k_{(n)}(s) = g_{ik}\left(x(s)\right)\frac{\delta^{*}\eta_{(n)}}{ds}\eta_{(n+1)} = (-1)^{\delta_{(n)}+\delta_{(n+1)}}\varkappa_{(n)}(s).$$

Da $k_{(n)}$ und $\varkappa_{(n)}$ beide stets positiv sind, gilt

$$\delta_{(n)} + \delta_{(n+1)} \equiv 0 \pmod 2.$$

Es sind also entweder alle $\delta_{(n)} \equiv 1 \pmod 2$ oder alle $\delta_{(n)} \equiv 0 \pmod 2$. Da $\eta_{(1)}(s) = \tilde{\eta}_{(1)}(s) = \xi_{(1)}(s)$, sind also alle $\delta_{(n)} \equiv 0 \pmod 2$. Damit ist bewiesen, daß $\varkappa_{(n)}(s)$, $\eta^{i}_{(n)}(s)$ wirklich die zu $x^{i}(s)$ gehörigen Krümmungen und Gerüstvektoren sind.

Göttingen, Nußanger 70.

(Eingegangen am 22. Juni 1954.)

Rosenberg, A.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 150—159 (1954)

Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linear transformations*).

By
Alex Rosenberg.

Introduction.

If $\mathfrak{M}$ is a left vector space and $\mathfrak{N}$ a right vector space over a division ring D, and if they are linked by an inner product (x, f) which is a non-degenerate bilinear function from $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ to D, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ are called dual spaces over D [4], [7]. If $\mathfrak{K}$ is a subspace of $\mathfrak{M}$, the annihilator of $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{N}$ is the set of all vectors f in $\mathfrak{N}$ such that $(\mathfrak{K}, f) = 0$. The annihilator is a subspace of $\mathfrak{N}$ and is denoted by $\mathfrak{K}'$. A similar definition holds for the annihilator $\mathfrak{L}'$ in $\mathfrak{M}$ of a subspace $\mathfrak{L}$ of $\mathfrak{N}$. A subspace $\mathfrak{K}$ of $\mathfrak{M}$ is called closed if $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}$ [7]. Closure of subspaces in this sense is the same as closure in the $\mathfrak{N}$-topology of $\mathfrak{M}$: The neighborhoods of an element x of $\mathfrak{M}$ are the cosets $x + \mathfrak{F}'$ where $\mathfrak{F}$ is any finite-dimensional subspace of $\mathfrak{N}$ [4, p. 16]. It is then known that a semi-linear transformation T of $\mathfrak{M}$, with associated automorphism σ of D, is continuous in this topology if and only if there exists a semi-linear transformation T^* of $\mathfrak{N}$, with associated automorphism σ of D, such that $(xT, f) = \sigma(x, T^* f)$; in particular, a linear transformation T of $\mathfrak{M}$ is continuous if and only if there exists a linear transformation T^* of $\mathfrak{N}$ such that $(xT, f) = (x, T^* f)$, [4, p. 17]. If T is a continuous semi-linear transformation, T^* is called the adjoint of T. The ring of all continuous linear transformations will be denoted by $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. We shall always write linear transformations of $\mathfrak{M}$ on the right, linear transformations of $\mathfrak{N}$ on the left. Thus if T, S are in $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $(TS)^* = T^* S^*$ and the mapping $T \to T^*$ gives an isomorphism of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. In general if R is a ring generated by continuous semi-linear transformations we shall denote the ring generated by the adjoints of elements of R by R^*.

Rings of the form $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ are of interest for two reasons. Firstly, they form a special class of primitive rings [3] and the latter play a role in the general structure theory of rings analogous to that played by simple rings in the structure theory of rings with descending chain condition. Secondly, the rings of all bounded operators on Banach spaces are rings of this type.

In this paper we study simple finite-dimensional subalgebras (over the center of D) of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. First the centralizer of such an algebra is determined and is seen to be isomorphic to $L(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ dual spaces over a division ring. Taking the centralizer again yields the original subalgebra. Next, we

*) Presented to the American Mathematical Society, May 1, 1954. Part of this work was carried out while the author held a research grant from the National Science Foundation.

specialize to the case where D is an algebraically closed field and then can prove a refinement of the first result as well as being able to find all those subalgebras whose centralizers are simple finite-dimensional algebras. In the third section, still sticking to an algebraically closed field, we show that an isomorphism between two simple finite-dimensional subalgebras can be extended to an inner one of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ if and only if the centralizers are isomorphic. Finally, if $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ are dual spaces over a division ring, both of countably infinite dimension, we show that every isomorphism of two simple finite-dimensional subalgebras of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ can be extended to an inner one of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

I should like to take this opportunity to thank Prof. I. KAPLANSKY who first suggested some of these problems to me. My thanks are also due to Prof. N. JACOBSON for allowing me to read parts of a manuscript of a forthcoming book on the theory of rings.

§ 1. Centralizers of subalgebras.

Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be a pair of dual spaces over a division ring D, whose center we denote by Φ. We write $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ for the ring of all linear transformations with adjoints on $\mathfrak{N}$ and $F = F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ for its socle, all those elements of A whose ranges are finite-dimensional. We shall use the notations E and E_c for the ring of all endomorphisms of the abelian group $\mathfrak{M}$ and for the ring of all endomorphisms which are continuous in the $\mathfrak{N}$-topology, respectively. For each α in D we denote the mapping $x \to \alpha x$ of $\mathfrak{M}$ by α_L; α_L is a continuous semi-linear transformation with adjoint $f \to f\alpha$ on $\mathfrak{N}$. We write D_L for the set of α_L and note that the center of A is Φ_L [5, p. 266].

Let B_0 be a simple finite-dimensional subalgebra[1]) of A containing the unit of A. We wish to study the centralizer $C = A(B_0)$ of B_0 in A, i.e., the set of all those c in A such that $bc = cb$ for every b in B_0. Now C can also be thought of as the set of all those continuous endomorphisms of $\mathfrak{M}$ which commute with every element of B_0 and D_L, $C = E_c(B_0 D_L)$. Furthermore, $B_0 D_L \cong B_0 \otimes_\Phi D_L$ [1, Theorem 7.1 D], and the latter is a simple ring satisfying the descending chain condition [1, Corollary 7.1 C].

For future applications in establishing a GALOIS theory for A we shall study a slightly more general situation: We let B be a simple subring of E_c, satisfying the descending chain condition and containing the unit of A. We further suppose that $B \supset D_L$ and has a finite left basis of continuous semi-linear transformations over it. Clearly $B_0 D_L$ satisfies all these conditions. Also, such rings are of interest since the fixed rings of certain kinds of groups of automorphisms of A are precisely the centralizers in E_c of rings satisfying the same conditions as B [9, p. 282]. Even though the elements of B are not necessarily semi-linear transformations we may speak of their adjoints; since every b in $B = \sum \alpha_L T$, T independent continuous semi-linear transformations, $b^* = \sum \alpha_L^* T^*$ is a perfectly well defined mapping of N and B^* is isomorphic to B. Of course, the equation $(xb, f) = (x, b^* f)$ will in general be false.

[1]) Throughout this paper all algebras have base field Φ_L.

B is simple with the descending chain condition and so every unitary right B-module will be completely reducible [6, Lemma 1]. Thus let $\mathfrak{U}$ be an irreducible right B-submodule of $\mathfrak{M}$. Since $D_L \subset B$, $\mathfrak{U}$ is a subspace and since B has finite left dimension over D_L, $\mathfrak{U}$ is a finite-dimensional subspace of $\mathfrak{M}$. Now if $(\mathfrak{U}, f) = 0$, by writting $b = \sum \alpha_L T$, with T continuous semi-linear transformations in B, we easily verify $(\mathfrak{U}, b^* f) = 0$ so that $\mathfrak{U}'$ is a left B^*-module. Since $\mathfrak{N}$ is a completely reducible left B^*-module we may write $\mathfrak{N} = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{U}'$ where $\mathfrak{V}$ is a left B^*-module and so a subspace. But then by Theorem III-10 of [7] the dimension of $\mathfrak{V}$ is the dimension of $\mathfrak{U}$, so that $\mathfrak{V}$ is an irreducible left B^*-module also. Since it can easily be seen that $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}' = 0$, the same theorem yields $\mathfrak{M} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{V}'$, so that $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ are a pair of dual spaces over D which are also irreducible right B and left B^*-modules respectively. We now define a linear transformation e on $\mathfrak{M}$ by $ue = u$, u in $\mathfrak{U}$; $xe = 0$, x in $\mathfrak{V}'$. It is then easily verified that e has an adjoint e^* which is the identity on $\mathfrak{V}$ and annihilates $\mathfrak{U}'$ so that e is in $E_e(B) = C$.

Clearly eCe is a ring of endomorphisms of $\mathfrak{U}$ which commute with those induced on $\mathfrak{U}$ by B. Conversely if c_1 is an endomorphism of $\mathfrak{U}$ commuting with those induced by B, it commutes with those induced by D_L and so is a linear transformation of $\mathfrak{U}$, and thus has an adjoint c_1^* on $\mathfrak{V}$. We then extend c_1 to an element c of A, by letting $c = c_1$, $c^* = c_1^*$ on $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$, and letting $\mathfrak{V}' c = c^* \mathfrak{U}' = 0$. It is then clear that c is in eCe, so that eCe is the ring of all endomorphisms of $\mathfrak{U}$ commuting with B. Thus by SCHUR's Lemma eCe is a division ring and B induces the ring of all linear transformations on the finite-dimensional right eCe-space $\mathfrak{U}$. Then

Lemma 1. $\mathfrak{U}eC = \mathfrak{M}$, $C^* e^* \mathfrak{V} = \mathfrak{N}$.

Proof. For any x in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{U} + xB$ is a finite-dimensional subspace and a completely reducible right B-module. Then just as above we can write $\mathfrak{M} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{L}'$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{K}'$ where $\mathfrak{L}$ is a completely reducible left B^*-module and a space dual to $\mathfrak{K}$ relative to the bilinear form linking $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$. We write $\mathfrak{K} = \sum_1^n{}_{\oplus} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}_i$ irreducible right B-modules. All the $\mathfrak{U}_i$ are B isomorphic, and we denote a fixed such isomorphism of $\mathfrak{U}_1$ onto $\mathfrak{U}_i$ by e_{1i}. By requiring e_{1i} to annihilate $\mathfrak{U}_j$, $j \neq 1$, we extend it to a mapping of all of $\mathfrak{K}$ and since $D_L \subset B$, e_{1i} is a linear transformation of $\mathfrak{K}$. Therefore e_{1i} has an adjoint e_{1i}^* on $\mathfrak{L}$, and if we set $\mathfrak{L}' e_{1i} = 0 = e_{1i}^* \mathfrak{K}'$, e_{1i} becomes an element of C. Proceeding similarly with the inverse B-isomorphism of $\mathfrak{U}_i$ onto $\mathfrak{U}_1$, we obtain an element e_{i1} of C such that $e_{1i} e_{i1} = e$ and $e_{i1} e_{1i} = e_{ii}$, where e_{ii} is an element of C which is the identity map on $\mathfrak{U}_i$ and annihilates $\sum_{j \neq i}{}_{\oplus} \mathfrak{U}_j \oplus \mathfrak{L}'$. Since $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U} e e_{1i}$, we see that $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}eC$ and so $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}eC$. Similarly, $\mathfrak{N} = C^* e^* \mathfrak{V}$.

We recall that a ring R is right primitive if it admits a faithful irreducible right-module [3, Theorem 21]. If, moreover, R has a minimal right ideal, it is known that there exists a pair of dual spaces $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ over a division ring, such that $F(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \subseteq R \subseteq L(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, [4, Theorem 8]. In this case R possesses both left and right minimal ideals which are of the form Re, eR; $e^2 = e \neq 0$,

eRe a division ring [4, p. 13]. Then, as is easily seen, eR, Re are dual spaces over eRe with regard to the bilinear function $(ep, qe) = epqe$. Furthermore a right multiplication by an element of R on eR is a linear transformation on eR, with adjoint the left multiplication by the same element on Re, and it can be shown that $F(eR, Re) \subseteq R \subseteq L(eR, Re)$[2]).

Lemma 2. *C is a primitive ring with minimal ideals.*

Proof. We first show that C has no nonzero nilpotent two-sided ideals, thus proving that eC is a minimal right ideal [1, Theorem 5.4A]. Thus, let I be a two-sided nilpotent ideal in C. Then $eIe \subset I$ and since eCe is a division ring, $eIe = 0$. Hence $\mathfrak{U}Ie = \mathfrak{U}eIe = 0$, and since $\mathfrak{M}I = \mathfrak{U}eCI \subset \mathfrak{U}I$ we have $\mathfrak{M}Ie = \mathfrak{U}Ie = 0$, so that $Ie = 0$. But then $I^*e^* = 0$ and since $I^*\mathfrak{V} = I^*\mathfrak{N}$, $I^*\mathfrak{N} = I^*e^*\mathfrak{V} = 0$, $I^* = I = 0$. To complete the proof we note that $eCd = 0$ implies $\mathfrak{M}d = \mathfrak{U}eCd = 0$ so that $d = 0$. Thus eC is faithful as well as being irreducible.

We now know that $F(eC, Ce) \subseteq C \subseteq L(eC, Ce)$ and shall finish up by proving that $C \cong L(eC, Ce)$. We first have

Lemma 3. *For any x in $\mathfrak{M}$ let $\sum_1^n{}_{\oplus} \mathfrak{U}_i = \sum_1^n{}_{\oplus} \mathfrak{W}_i$ be two splittings of $\mathfrak{U} + xB$ into irreducible right B-modules with $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{U}$. Let e_{1i}, f_{1j} be B isomorphisms of $\mathfrak{U}$ onto $\mathfrak{U}_i$ and $\mathfrak{W}_j$ respectively extended to elements of C as in Lemma 1. Then $f_{1j} = \sum_i \alpha_{ij} e_{1i}$, α_{ij} in eCe.*

Proof. From the definitions given in the proof of Lemma 1 it is clear that $\sum e_{ii}$ acts as the identity on $\mathfrak{U} + xB$. Thus $f_{1j} = f_{1j}\sum e_{ii} = \sum (f_{1j}e_{i1})\, e_{1i}$, and $f_{1j}e_{i1}$ is clearly an element of eCe.

Now let τ be any element of $L(eC, Ce)$ with adjoint τ^*. That is, $(ec)^\tau$ and $(de)^{\tau^*}$ are again element of eC and Ce respectively, and $(ec)^\tau de = ec(de)^{\tau^*}$. For any x in $\mathfrak{M}$ and f in $\mathfrak{N}$, we have $\mathfrak{U} + xB = \sum_1^n{}_{\oplus} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{V} + B^*f = \sum_1^m{}_{\oplus} \mathfrak{V}_j$ where $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}$; $\mathfrak{U}_i$ an irreducible right B-module, $\mathfrak{V}_j$ an irreducible left B^*-module. Then as in Lemma 1, there are elements e_{1i}, g_{j1} in eC and Ce, respectively such that $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}e_{1i}$, $\mathfrak{V}_j = g_{i1}^*\mathfrak{V}$. Thus $x = \sum_1^n u_i e_{1i}$, $f = \sum_1^n g_{j1}^* v_j$, u_i in $\mathfrak{U}$, v_j in $\mathfrak{V}$. Now for any τ in $L(eC, Ce)$ we define

$$x\,t = \sum_1^n u_i (e_{1i})^\tau, \qquad t^* f = \sum_1^m (g_{j1}^{\tau^*})^* v_j.$$

We first show that t is a well defined mapping of $\mathfrak{M}$. Let $x = \sum u_i e_{1i} = \sum w_j f_{1j}$ be two different splittings of x arising from two, not necessarily distinct, splittings of $\mathfrak{U} + xB$. By Lemma 3, $f_{1j} = \sum \alpha_{ij} e_{1i}$, α_{ij} in eCe. Thus,

$$\sum_j w_j (f_{1j})^\tau = \sum_j w_j (\sum \alpha_{ij} e_{1i})^\tau = \sum_{i,j} w_j \alpha_{ij} (e_{1i})^\tau,$$

[2]) This method of proving Theorem 8 of [4] is due to Prof. KAPLANSKY. It has only been published in mimeographed lecture notes, but will be included in a forthcoming book by Prof. JACOBSON.

since τ is linear with regard to eCe. But $\sum_j w_j \alpha_{ij} = u_i$ so that $\sum w_j (f_{1j})^\tau = \sum u_i (e_{1i})^\tau$. A similar calculation shows that t^* is a well defined mapping of $\mathfrak{N}$.

It is easily seen that t is a linear transformation of $\mathfrak{M}$ and we shall now show that t^* is its adjoint on $\mathfrak{N}$:

$$(xt, f) = \left(\sum_i u_i (e_{1i})^\tau, \sum_j g_{j1}^* v_j\right) = \sum_{i,j} \left(u_i (e_{1i})^\tau g_{j1}, v_j\right)$$

$$= \sum_{i,j} \left(u_i e_{1i} (g_{j1})^{\tau^*}, v_j\right) = (x, t^* f).$$

Finally $xb = \sum (u_i e_{1i}) b = \sum (u_i b) e_{1i}$, so $xbt = \sum (u_i b) (e_{1i})^\tau = \sum u_i (e_{1i})^\tau b = xtb$ so that t is in C. Now if c is in C it becomes an element of $L(eC, Ce)$ by letting it act on eC as a right multiplication. Thus the embedding of C into A as a subring of $L(eC, Ce)$ which we have given above, coincides with the already given embedding of C as $E_c(B)$. Thus the mapping $\tau \to t$ is a homomorphism of $L(eC, Ce)$ onto C. The kernel is either 0 or contains $F(eC, Ce)$, the socle of $L(eC, Ce)$ [3, Theorem 29]. But e is in $F(eC, Ce)$ and is not mapped into 0, thus C is isomorphic to $L(eC, Ce)$.

Now if S is the socle of C, $F = F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ the socle of A, e is in $S \cap F$, and so $S \cap F$ is a nonzero two-sided ideal of the simple ring S, so that $S = S \cap F \subset F$. Since $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}eC$, and $eC \subset S$, $\mathfrak{M}S = \mathfrak{M}$ and $S^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ by a similar argument. The last two conditions are known to be independent [10, p. 131].

The index of D_L in B, $i[B:D_L]$ as defined by DIEUDONNÉ [2, p. 159] is the number of minimal right or left ideals that occur in a direct sum decomposition of B; it is well known that $i[B:D_L]$ = dimension of $\mathfrak{U}$ as a right eCe-space. The right and left heights of C in A have also been defined in [2]: $h[A:C]_r$ = the number of irreducible right C-modules that occur in a direct sum decomposition of $\mathfrak{M}$, $h[A:C]_l$ = the number of irreducible left C^*-modules that occur in a direct sum decomposition of $\mathfrak{N}$. We proceed to show that $i[B:D_L] = h[A:C]_l = h[A:C]_r$. Let $x_1, x_2, \ldots, x_k$ be an eCe basis of $\mathfrak{U}$. Then $x_i eC$ is a nonzero homomorphic image of the irreducible right C-module, eC, and so is itself irreducible. Since $\mathfrak{U}eC = \mathfrak{M}$, the sum of the $x_i eC$ is $\mathfrak{M}$, and it only remains to show that the $x_i eC$ are independent. If x is in $x_i eC \cap \sum_{j \neq i} x_j eC$, $x = x_i e d_i = \sum_{i \neq j} x_j e d_j$, d_r in C. But there is a b in B such that $x_i b = x_i$; $x_j b = 0$, $j \neq i$; thus $x = x_i b e d_i = \sum_{i \neq j} (x_j e d_j) b = 0$. Exactly the same proof works for $\mathfrak{N}$.

Finally we compute $E_c(C)$. Clearly $E(C) \supset E_c(C) \supset B$. Now C is a completely reducible ring of endomorphisms of $\mathfrak{M}$, and so by a result of DIEUDONNÉ [2, p. 157], $E(C)$ is isomorphic to the ring of all linear transformations on a right eCe space of dimension $h[A:C]_r$, i.e. $E(C) \cong B$. Furthermore $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}e$ is a right $E(C)$-module, and since it already is irreducible as a right B-module it also is an irreducible right $E(C)$-module. Furthermore the ring of endomorphisms of $\mathfrak{U}$ that commute with those induced by $E(C)$ is precisely eCe [2, p. 157], and so B and $E(C)$ induce the same ring on $\mathfrak{U}$. Since $E(C)$ is simple, no element of it annihilates $\mathfrak{U}$ and so $B = E(C) = E_c(C)$.

We have proved

Theorem 1. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be a pair of dual spaces over a division ring D. Let B be a subring of E_c, the ring of all continuous endomorphisms of $\mathfrak{M}$, which contains the unit of E_c and satisfies*

(i) *B is simple with the descending chain condition.*

(ii) *B contains D_L and has a finite left basis of continuous semi-linear transformations over it.*

Then if $C = E_c(B)$, the centralizer of B in C, C is a subring of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ satisfying:

(i) *C is a ring of the form $L(\mathfrak{L}, \mathfrak{N})$, $\mathfrak{L}, \mathfrak{N}$ dual spaces over a division ring.*

(ii) *If S is the socle of C, $S < F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$; $\mathfrak{M}S = \mathfrak{M}$; $S^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$.*

(iii) $i[B:D_L] = h[A:C]_r = h[A:C]_l$.

(iv) $E_c(E_c(B)) = B$.

If $B = B_0 D_L \cong B_0 \otimes_{\Phi} D_L$ with B_0 a finite-dimensional simple subalgebra of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, we have that $A(B_0) = E_c(B)$ and that $A(A(B_0)) = E_c(E_c(B)) \cap A = B_0 D_L \cap A = B(D_L) = B_0$ by Lemma 7.3 of [1]. Thus

Corollary 1. *If B_0 is a simple finite-dimensional subalgebra of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $A(B_0)$ has all the properties of C in Theorem 1 and $A(A(B_0)) = B_0$.*

§ 2. The algebraically closed case.

We now specialize to the case $D = \Phi$, an algebraically closed field. Then $B = B_0$ simply becomes a matric algebra over Φ and so $eCe = \Phi_L e$. Moreover the irreducible right $C = E_c(B) = A(B_0)$-modules are now subspaces and so C is the ring of all continuous linear transformations on a pair of dual spaces over Φ. However, even more is true: Let $x_1 \dots x_k$ be a $\Phi_L e = eCe$ basis of $\mathfrak{U}$ and let $f_1, \dots, f_k$ be the dual basis of $\mathfrak{V}$, i.e. $(x_i, f_j) = \delta_{ij}$. As we saw $x_i eC$ and $C^* e^* f_j$ are irreducible right C- and left C^*-modules whose direct sum is $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ respectively. Now if $i \neq j$ $(x_i ec, d^* e^* f_j) = (x_i ecde, f_j) = 0$ since $ecde$ is in $\Phi_L e$. If $(x_i ec, C^* e^* f_i) = 0$, $(x_i ecCe, f_i) = 0$ so that $ecCe = 0$. Now if $ec \neq 0$, the right annihilator of Ce would be a nonzero two-sided ideal and so contain S, the socle of C [3, Theorem 29]. Thus $eCe = 0$, a contradiction. Similarly we see that $(x_i eC, d^* e^* f_i) = 0$ implies $de = 0$ so that $\mathfrak{M}_i = x_i eC$, $\mathfrak{N}_i = C^* e^* f_i$ are dual spaces over Φ. Moreover $(x_i ec, d^* e^* f_i) = \alpha$ where $ecde = \alpha_L e$ in $\Phi_L e$, so that the inner product between $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ as subspaces of $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ is the same as that linking eC, Ce. It follows that C is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$, the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$, since the irreducible C and C^* modules are unique [4]. Thus we have

Theorem 2. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over an algebraically closed field Φ and let B be a simple finite-dimensional subalgebra of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, containing the unit element of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Then $\mathfrak{M} = \sum_1^k{}_{\oplus} \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^k{}_{\oplus} \mathfrak{N}_i$; $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_j) = 0$; $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ dual spaces, and $A(B)$ is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$, the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$. Furthermore, $k^2 = [B:\Phi_L]$ and $A(A(B)) = B$.*

The splitting of the dual spaces $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ into a direct sum of the isomorphic[3]) dual spaces $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ can also be expressed by saying that $\mathfrak{M}$ is a direct sum of closed irreducible right C-subspaces, $\mathfrak{M}_i$, and that C is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}/(\mathfrak{M}_i)')$.

In this case we can prove a converse:

Theorem 3. *Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be dual spaces over an algebraically closed field Φ. Let C be a subalgebra of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, containing the unit of A and satisfying*

(i) *C is of the form $L(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$; $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ dual spaces over a division ring.*

(ii) *If $S = F(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ is the socle of C, $S < F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ and $\mathfrak{M}S = \mathfrak{M}$, $S^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$.*

Then $h[A:C]_r = h[A:C]_l = k < \infty$ and $A(C)$ is isomorphic to the algebra of $k \times k$ matrices over Φ.

Proof. $\mathfrak{M}$ splits into a direct sum of a certain number of isomorphic irreducible right C-modules which are all subspaces since $C \supset \Phi_L$ [6, Lemma 1]. Hence for any s in S, the dimension of $\mathfrak{M}s$ is at least the number of these summands. Since s is finite valued, $h[A:C]_r = k < \infty$[4]). Now an irreducible right C-module is isomorphic to a minimal right ideal and so is also an irreducible S module. Thus by Theorem 6 of [10] $\mathfrak{M} = \sum_1^k \oplus \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^k \oplus \mathfrak{N}_i$; $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_j) = 0$; $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ dual spaces over Φ; and S is isomorphic to $F(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$ the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$. Since $\mathfrak{M}_i C = \mathfrak{M}_i SC = \mathfrak{M}_i S$, $\mathfrak{M}_i$ and $\mathfrak{N}_i$ are irreducible right C and left C^*-modules respectively and since the irreducible representations of C and C^* are unique [4], C is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$, the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$. Hence $L(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1) \cong L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$ where the isomorphism is effected by restricting the same element of C to $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{M}_i$. Thus by [5, Theorem 7, p. 266] there exist an invertible semi-linear transformation e_{1i} of $\mathfrak{M}_1$ to $\mathfrak{M}_i$ which has an adjoint e_{1i}^* from $\mathfrak{N}_i$ to $\mathfrak{N}_1$, such that $\mathfrak{M}_1 e_{1i} c = \mathfrak{M}_1 c e_{1i}$. Since $\Phi_L < C$, e_{1i} is actually a linear transformation of $\mathfrak{M}_1$ onto $\mathfrak{M}_i$. By defining $\mathfrak{M}_j e_{1i} = 0$, $j \neq 1$, e_{1i} becomes an element of $A(C)$, since e_{1i}^* can be extended in the obvious way. From this point on the proof that $A(C) = \Phi_k$ is well known, for example it may be found on p. 44 of [1].

Theorem 3 shows that in the algebraically closed case we get a one-to-one correspondence between the simple subalgebras of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ and those algebras C having the properties listed in the theorem. This is the beginning of a GALOIS theory for A and we hope to develop such a theory in a subsequent paper.

§ 3. Isomorphic subalgebras.

We have

Theorem 4. *Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be dual spaces over an algebraically closed field Φ and let $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Let B and $\bar{B}$ be two Φ-isomorphic[5]) simple finite-dimensional subalgebras of A, both containing the unit of A. Then the isomorphism*

[3]) For the obvious definitions of direct sum and isomorphism of dual spaces cf. [7, p. 160].

[4]) We take this opportunity to remark that this argument shows that what was called "the height of B in A" on p. 126 of [10] is finite.

[5]) I.e., the isomorphism leaves Φ elementwise fixed.

between B and $\overline{B}$ can be extended to an inner one of A if and only if $A(B)$ and $A(\overline{B})$ are also Φ-isomorphic.

Proof. If the isomorphism can be extended to an inner one it is clear that $A(B)$ and $A(\overline{B})$ are also conjugate [2, p. 175].

Now suppose that $A(B) = C$, and $A(\overline{B}) = \overline{C}$ are Φ-isomorphic. Then since B and $\overline{B}$ are isomorphic, Theorem 2 yields $h[A:C]_r = h[A:\overline{C}]_r = \sqrt{[B:\Phi]} = k < \infty$. Let $\mathfrak{M} = \sum_1^k \oplus \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^k \oplus \mathfrak{N}_i$ be a splitting for C as described in Theorem 2 and let $\overline{\mathfrak{M}} = \sum_1^k \oplus \overline{\mathfrak{M}}_i$, $\overline{\mathfrak{N}} = \sum_1^k \oplus \overline{\mathfrak{N}}_i$ be such a splitting for $\overline{C}$. If τ is a Φ-isomorphism of C onto $\overline{C}$ the mapping $c \to \tau(c)$ where c and $\tau(c)$ are restricted to $\mathfrak{M}_i$ and $\overline{\mathfrak{M}}_i$ respectively induces an isomorphism of $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$ onto $L(\overline{\mathfrak{M}}_i, \overline{\mathfrak{N}}_i)$. Again by [5, Theorem 7, p. 266] there is an invertible semi-linear transformation P_i from $\mathfrak{M}_i$ onto $\overline{\mathfrak{M}}_i$, with adjoint P_i^* from $\overline{\mathfrak{N}}_i$ to $\mathfrak{N}_i$ such that $\mathfrak{M}_i c P_i = \mathfrak{M}_i P_i \tau(c)$. Since τ is the identity on Φ it follows that P_i is actually linear. We now define a linear transformation P on $\mathfrak{M}$ by requiring it to act as P_i on $\mathfrak{M}_i$ and a linear transformation P^* on $\mathfrak{N}$ by requiring it to act as P_i^* on $\overline{\mathfrak{N}}_i$. It can then be verified that P^* is the adjoint of P, so that P is in A, and that $c = P\,\tau(c)\,P^{-1}$ [6]). Since $B = A(C)$ and $\overline{B} = A(\overline{C})$ this implies also that $P\overline{B}P^{-1} = B$. Now if σ is the given Φ-isomorphism of B onto $\overline{B}$ the mapping $P^{-1}bP \to \sigma(b)$ is a Φ-automorphism of $\overline{B}$. But by a well known theorem [1, Corollary 7.2D] every such automorphism of $\overline{B}$ is inner. Hence there is an element Q in $\overline{B}$ such that $QP^{-1}bPQ^{-1} = \sigma(b)$.

The condition that $C \cong \overline{C}$ when $B \cong \overline{B}$ can be reformulated in terms of the dual spaces $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. For since dual spaces over Φ are isomorphic if and only if the rings of all continuous linear transformations are Φ-isomorphic [7, Theorem III-4], $C \cong \overline{C}$ is equivalent to requiring $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ and $\overline{\mathfrak{M}}_j, \overline{\mathfrak{N}}_j$ to be isomorphic. Thus if every isomorphism between finite-dimensional simple subalgebras of A can be extended to an inner one, any two splittings of $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ into a direct sum of k isomorphic dual spaces must be equivalent in the sense that the summands from each splitting are isomorphic to one another. We do not know of an example of dual spaces over an algebraically closed field where two inequivalent splittings into the same number of isomorphic dual spaces exist, but we conjecture that there are such spaces, and in fact examples can probably be found already amongst complex BANACH spaces. We state this last problem explicitly for $k = 2$, keeping in mind that in a BANACH space closure of a subspace in the sense $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}$ is the same as closure in the norm topology [7, p. 172]: *Is there a complex* BANACH *space $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$, where $\mathfrak{E}_i, \mathfrak{F}_i$ are closed subspaces, $\mathfrak{E}_1$ is isomorphic to $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{F}_1$ isomorphic to $\mathfrak{F}_2$, but $\mathfrak{E}_1$ is not isomorphic to $\mathfrak{F}_1$?*

Now a HILBERT space $\mathfrak{M}$ is completely characterized by its dimension (cardinality of a maximal ortho-normal set), and if $\mathfrak{M}_i$ is a closed subspace of $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M}$ is a direct sum of a finite number of copies of $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}$ and

[6]) These calculations are carried out in detail in the proof of Theorem 7 of [10].

$\mathfrak{M}_i$ have the same dimension, so that $\mathfrak{M}_i$ is isomorphic to $\mathfrak{M}$. Thus if $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ a complex HILBERT space, C is always isomorphic to $\bar{C}$ and we have

Corollary 2. *Let B and $\bar{B}$ be two simple isomorphic finite-dimensional subalgebras of A, the ring of all bounded operators on a complex* HILBERT *space. Then the isomorphism between B and $\bar{B}$ can be extended to an inner one of A.*

If $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^*$, the space of all linear functionals on $\mathfrak{M}$, it is clear that the $\mathfrak{M}_i$ are also isomorphic to $\mathfrak{M}$ and so we get the algebraically closed case of Théorème 8a of [2]. Finally if both $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ have countable dimension over Φ, $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ is isomorphic to $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ [7, Lemma, p. 171]. However, in that case we shall obtain the extension of isomorphism theorem even in the division ring case in the next section.

Some of the results of these last two paragraphs have been obtained for *-subalgebras of the ring of all bounded operators on a HILBERT space in [8].

§ 4. Isomorphic subalgebras in the countable-countable case.

We have

Theorem 5. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over a division ring D both of countable dimension over D. Let B be a subring of E_c, the ring of continuous endomorphisms of $\mathfrak{M}$, which contains the unit of E_c and satisfies:*

(i) *B is simple with the descending chain condition.*

(ii) *B contains D_L and has a finite left basis of continuous semi-linear transformations over it.*

Then $\mathfrak{M} = \sum_1^\infty{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^\infty{}_\oplus\, \mathfrak{V}_i$, where $\mathfrak{U}_i (\mathfrak{V}_i)$ are irreducible finite-dimensional right B (left B^*)-subspaces, $(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_j) = 0$, and $\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_i$ are dual spaces over D.

Proof. This proof is modeled after that of the Lemma on p. 171 of [7]. Let $\{x_h\}$ be a basis of $\mathfrak{M}$, $\{f_h\}$ a basis of $\mathfrak{N}$. We suppose that $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_n$; $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ with the desired properties have already been constructed and proceed to show how the next batch of $\mathfrak{U}$'s is added. It is clear that $\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i$, $\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{V}_i$ are finite-dimensional dual spaces, thus by Theorem III-2 of [7] we may write $\mathfrak{M} = \sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i \oplus \left(\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{V}_i\right)'$, $\mathfrak{N} = \sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{V}_i \oplus \left(\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i\right)'$ where $\mathfrak{M}_0 = \left(\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{V}_i\right)'$, $\mathfrak{N}_0 = \left(\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i\right)'$ are dual spaces which are right B and left B^*-modules respectively. Now let x_k be the first element of the basis not in $\sum_1^n{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i$ and suppose its component in $\mathfrak{M}_0$ is $\bar{x}_k$. Then $\bar{x}_k B$ is a completely reducible right B-submodule of $\mathfrak{M}_0$ and we may write $\bar{x}_k B = \sum_{n+1}^m{}_\oplus\, \mathfrak{U}_i$ where the $\mathfrak{U}_i$ are finite-dimensional irreducible B-subspaces of $\mathfrak{M}_0$. But then as in the proof of Lemma 1, $\mathfrak{M}_0 = \bar{x}_k B \oplus \mathfrak{L}'$, $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{L} \oplus (\bar{x}_k B)'$ where $\mathfrak{L}$ is a finite-dimensional subspace which is also a left B^*-module and is dual to $\bar{x}_k B$.

But in finite-dimensional dual spaces all subspaces are closed, so that if we define $\mathfrak{V}_i = \left(\sum_{j \neq i} \mathfrak{U}_j\right)' \cap \mathfrak{L}$, $i, j = n+1, \ldots, m$, it is easily seen that $\mathfrak{L} = \sum_{n+1}^{m} \mathfrak{V}_i$ and the new $\mathfrak{V}_i$ satisfy all the requirements of the theorem. By interchanging the roles of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ at the next step we build the required decomposition.

As an immediate application we have

Theorem 6. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over a division ring D with center Φ, both of countable dimension. Let B_0 and $\overline{B}_0$ be two Φ-isomorphic simple finite-dimensional subalgebras of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ containing the unit of A. Then the isomorphism can be extended to an inner one of A.*

Proof. We form the rings $B = B_0 D_L$, $\overline{B} = \overline{B}_0 D_L$. As before $B \cong B_0 \otimes_\Phi D_L$, $\overline{B} \cong \overline{B}_0 \otimes_\Phi D_L$ and so the given isomorphism between B_0 and $\overline{B}_0$ can be extended in an obvious manner to an isomorphism of B onto $\overline{B}$ leaving D_L elementwise fixed. Let $\mathfrak{M} = \sum_1^\infty \oplus \mathfrak{U}_i = \sum_1^\infty \oplus \overline{\mathfrak{U}}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^\infty \oplus \mathfrak{V}_i = \sum_1^\infty \oplus \overline{\mathfrak{V}}_i$, where the $\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_i$ are a splitting for B as in Theorem 5, and the $\overline{\mathfrak{U}}_i, \overline{\mathfrak{V}}_i$ are a splitting for $\overline{\mathfrak{B}}$ as in Theorem 5. Since all irreducible right B and $\overline{B}$-modules are isomorphic there exists an invertible endomorphism $\mathfrak{P}_i$ of $\mathfrak{U}_i$ onto $\overline{\mathfrak{U}}_i$ such that $\mathfrak{U}_i b P_i = \mathfrak{U}_i P_i \sigma(b)$, where σ is the given isomorphism of B onto $\overline{B}$ [2, p. 175]. If α is in D, $\sigma(\alpha_L) = \alpha_L$ so that P_i is a linear transformation. Since $\mathfrak{U}_i$ and $\overline{\mathfrak{U}}_i$ are finite-dimensional P_i has an adjoint P_i^* from $\overline{\mathfrak{V}}_i$ to $\mathfrak{V}_i$. Then exactly as in the proof of Theorem 4 we construct an invertible element P of A such that $\sigma(b) = P^{-1} b P$.

References.

[1] Artin, E., Nesbitt C. and Thrall R.: Rings with minimum condition. Ann Arbor 1948. — [2] Dieudonné, J.: La théorie de Galois des anneaux simples et semi-simples. Comment. Math. Helv. **21**, 154—184 (1948). — [3] Jacobson, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [4] Jacobson, N.: On the theory of primitive rings. Ann. of Math. **48**, 8—21 (1947). — [5] Jacobson, N.: Lectures in abstract algebra, vol. II. New York 1953. — [6] Kaplansky, I.: Representations of separable algebras. Duke Math. J. **19**, 219—222 (1952). — [7] Mackey, G. W.: On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 155—207 (1945). — [8] Nakamura, M., and Turumaru T.: Simple algebras of completely continuous operators. Tôhoku Math. J. **4**, 303—308 (1952). — [9] Nakayama, T.: Galois theory of simple rings. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 276—292 (1952). — [10] Rosenberg, A.: Subrings of simple rings with minimal ideals. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 115—138 (1952).

Dept. of Math., Northwestern University, Évanston, Illinois (U.S.A.).

(Eingegangen am 30. Mai 1954.)

Schütte, K.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 160—179 (1954)

Ein widerspruchsloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage.

Von
Kurt Schütte.

Zur Begründung der klassischen Analysis, deren Problematik in der imprädikativen Definition der reellen Zahl zugleich mit der uneingeschränkten Anwendung des tertium non datur liegt, besteht die Aufgabe, ein entsprechendes formales System als widerspruchsfrei nachzuweisen.

Als widerspruchsfrei bekannt ist eine „verzweigte" oder „konstruktive" Analysis, in der man nach Lorenzen[1]) die Fundamentalsätze der Analysis gewinnt, wenn man diese Sätze geeignet formuliert und die klassischen Beweise in geeigneter Weise abändert bzw. präzisiert. Diese Analysis hat eine verzweigte Typenlogik als Rahmen. Sie schließt die imprädikativen Begriffsbildungen vollständig aus und liefert demgemäß die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen, die z. B. in dem Satz von der unteren Grenze zum Ausdruck kommt, nur für einen prädikativen Mengenbegriff, wobei eine Menge reeller Zahlen natürlich nicht unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen definiert sein kann. Die reellen Zahlen der verzweigten Analysis sind zwar in einer beschränkten Sprache überabzählbar, aber abzählbar in einer hinreichend umfassenden Sprache.

In der vorliegenden Arbeit wird eine andere Möglichkeit zum widerspruchslosen Aufbau der Analysis angegeben. Hierbei liegt das von Ackermann[2]) als widerspruchsfrei nachgewiesene typenfreie System der Logik zugrunde. Dieses System läßt imprädikative Begriffsbildungen zu, was allerdings nur bei einer Einschränkung des tertium non datur in widerspruchsfreier Weise möglich ist. Das tertium non datur ist in dem typenfreien System nicht allgemein gegeben, aber doch weitgehend herleitbar. So läßt sich z. B., wie Ackermann gezeigt hat, in seinem System die gesamte verzweigte Typenlogik einschließlich des tertium non datur entwickeln.

Um die klassischen Schlußweisen trotz der hier eingeschränkten Anwendbarkeit des tertium non datur nach Möglichkeit zu retten, definieren wir den Mengenbegriff und damit den Begriff der reellen Zahl durch eine Herleitbarkeitsforderung, in der das tertium non datur enthalten ist. Hierzu wird ein fiktiver Beweisbarkeitsbegriff gebraucht, den wir im § 1 mit einer Erweiterung

[1]) Lorenzen, P.: Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis. Math. Z. **54**, 1—24 (1951). — Maß und Integral in der konstruktiven Analysis. Math. Z. **54**, 275—290 (1951).

[2]) Ackermann, W.: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. Math. Z. **55**, 364—384 (1952) u. **57**, 155—166 (1953).

des ACKERMANNschen Systems einführen und als widerspruchsfrei nachweisen. Das erweiterte System dürfte auch ohne den Einbau der Analysis von Interesse sein. § 3 zeigt, daß die in der verzweigten Typenlogik definierbaren Mengen unter den im § 2 eingeführten Mengenbegriff fallen. Demgemäß umfassen die im § 5 erklärten reellen Zahlen die reellen Zahlen der verzweigten Analysis. Dabei kommt man im Unterschied zur verzweigten Analysis mit einem einfachen logischen Rahmen ohne Typeneinteilung aus. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ergibt sich hier in anderer Weise als in der verzweigten Analysis, nämlich nicht durch eine Beschränkung der Sprache, sondern durch die starken Beweismittel des logischen Systems, in dem die reellen Zahlen mittels einer Herleitbarkeitsforderung abgegrenzt sind.

Eine Gemeinsamkeit mit der verzweigten Analysis besteht darin, daß ein Ausdruck, der auf die Gesamtheit der reellen Zahlen Bezug nimmt, im allgemeinen keine Menge darstellt. Daher sind auch hier zur Gewinnung der Fundamentalsätze geeignete Abänderungen oder Ergänzungen der klassischen Beweise vorzunehmen. § 6 gibt ein Beispiel dafür.

§ 1. Das logische System.

Wir legen ein nach ACKERMANN gebildetes typenfreies logisches System zugrunde, in dem nur Grundzeichen für konstante *Grundterme*, das *Abstraktionszeichen* λ und die logischen Zeichen $\vee$, $\bar{}$, (x) der *Disjunktion*, *Negation* und *Generalisation* (mit gebundenen Variablen) verwendet werden.

Als Mitteilungszeichen für *Terme* bzw. *Formeln* dienen kleine bzw. große deutsche Buchstaben, als Zeichen für *gebundene Variablen* kleine lateinische Buchstaben. Freie Variablen treten nicht auf. Durch die Schreibweise $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ sollen in einer Formel $\mathfrak{A}$ gewisse Stellen, die durch den Term $\mathfrak{t}$ besetzt sind, gekennzeichnet werden. Dabei ist zugelassen, daß $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ nicht auftritt. Entsprechend sind $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ und $\mathfrak{F}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ zu verstehen.

Terme bzw. *Formeln* sind Zeichenreihen, die sich nach folgenden Vorschriften bilden lassen:

1. Jeder Grundterm ist ein Term.
2. Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ Terme, so ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ eine Formel.
3. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ eine Formel, so ist $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Term.
4. Mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}[\mathfrak{t}]$ sind auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\bar{\mathfrak{A}}$, $(x)\mathfrak{C}[x]$ Formeln.

Herleitungen (formale Beweise) erfolgen aus den *Grundformeln* mittels *Schlußregeln*. Als *Grundformeln* dürfen beliebige Formeln der Gestalt

$$\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varphi}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n),$$

wo φ ein Grundterm ist, festgelegt werden. Dabei besteht nur die Bedingung, daß eine Formel nicht zugleich mit ihrer Negation als Grundformel auftritt. *Schlußregeln* sind:

I. Die elementaren Schlußregeln [3]) der *Vertauschung* und *Zusammenziehung* von Disjunktionsgliedern, der *Abschwächung* durch ein zusätzliches

[3]) Vgl. z. B. SCHÜTTE, K.: Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik. Math. Ann. **125**, 394—400 (1953).

Disjunktionsglied, des Überganges von $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ zu $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ (*Kompositionsschluß*), von $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ zu $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{N}$ (*Negationsschluß*), von $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ (*Schnitt*), von $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{N}$ zu $\overline{(x)}\,\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$ (*Allschluß*) und von $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{N}$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{N}$ zu $\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{N}$ bzw. $\overline{\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{N}$ (*Abstraktionsschlüsse*).

II. *Unendliche Induktion. Ist* $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{N}$ *für jeden Term* t *herleitbar, so gilt auch* $(x)\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$ *als herleitbar.*

Stellt man die Eigenschaft der Beweisbarkeit (Herleitbarkeit) in dem System selbst formal dar, so läßt sich die Formel, welche besagt: „$\mathfrak{A}$ *ist beweisbar oder* $\mathfrak{A}$ *ist nicht beweisbar*", nicht allgemein in dem System herleiten. Um trotzdem das entsprechende tertium non datur zu gewinnen, führen wir mit einem neuen Symbol B eine *fiktive Beweisbarkeit* ein. Das geschieht unter schrittweiser Erweiterung des bisher angegebenen Systems. Zunächst erweitern wir den Formelbegriff so, daß mit $\mathfrak{A}$ auch $B(\mathfrak{A})$ eine Formel ist, lassen aber die Grundformeln und Schlußregeln unverändert. So erhalten wir ein System Σ_0.

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ bilden wir das System Σ_n aus dem System Σ_0, indem wir zu den Grundformeln die durch folgende Regel erklärten B_n-*Grundformeln* hinzunehmen.

B-Regel. Läßt sich in Σ_{n-1} *aus den Annahmeformeln*

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r,\ (x)\,\mathfrak{B}_1[x], \ldots, (x)\,\mathfrak{B}_s[x]$$

auf eine Formel $\mathfrak{C}$ *schließen, so gilt*

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1) \vee \cdots \vee \overline{B}(\mathfrak{A}_r) \vee \overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x]) \vee \cdots \vee \overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x]) \vee B(\mathfrak{C})$$

als B_n-*Grundformel.*

Zu dieser Regel sind einige Erläuterungen zu geben:

1. Für das Schließen werden nicht nur die oben angegebenen Schlußregeln zugelassen, sondern auch diejenigen Umkehrungen, die sich aus den Herleitungsmöglichkeiten im ganzen ergeben[4]). Diese Umkehrungen sind die Schlüsse von $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ auf $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$, von $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$, von $\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{N}$ bzw. $\overline{\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{N}$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{N}$ und von $(x)\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{N}$ für jeden Term t. Eine weitere Schlußregel werden wir später hinzufügen.

2. Die Formeln $\mathfrak{A}_i$ bzw. $(x)\mathfrak{B}_i[x]$ dürfen auch fehlen. Ist insbesondere $\mathfrak{C}$ ohne Benutzung von Annahmeformeln zu erschließen, so gilt $B(\mathfrak{C})$ als B_n-Grundformel.

3. Auch die Formel $\mathfrak{C}$ darf fehlen, nämlich wenn die *leere Formel* aus den Annahmeformeln zu erschließen ist. Die leere Formel, die durch *Schnitt* aus

[4]) Vgl. z. B. SCHÜTTE, K.: Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann. **122**, 369—389 (1951), insbesondere § 2.

einer Formel und ihrer Negation zu erhalten ist, und aus der durch *Abschwächung* jede beliebige Formel folgt, stellt den *Widerspruch* dar.

Um die Widerspruchsfreiheit der Systeme Σ_n nachzuweisen, gebrauchen wir einige Hilfsbegriffe und Hilfssätze.

Als *B-Formeln* bezeichnen wir die leere Formel, alle Formeln der Gestalt

$$B(\mathfrak{A}), \quad (x)B(\mathfrak{B}[x]), \quad \overline{B}(\mathfrak{C}), \quad \overline{(x)}B(\mathfrak{D}[x])$$

und alle Disjunktionen aus solchen Formeln.

Unter *B_n-Sätzen* verstehen wir die Formeln folgender drei Arten:

a) B_n-Grundformeln,

b) B-Formeln, die durch *unendliche Induktion* aus B_n-Grundformeln zu gewinnen sind, also

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1)\vee\cdots\vee\overline{B}(\mathfrak{A}_r)\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x])\vee\cdots\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x])\vee(x)\,B(\mathfrak{C}[x]),$$

wenn

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1)\vee\cdots\vee\overline{B}(\mathfrak{A}_r)\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x])\vee\cdots\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x])\vee B(\mathfrak{C}[\mathfrak{t}])$$

für jeden Term t eine B_n-Grundformel ist.

c) B-Formeln, die aus Formeln a) bzw. b) durch *Abschwächungen* hervorgehen.

Satz 1. B-Formeln, die aus B_n-Sätzen durch *Vertauschungsschlüsse, Zusammenziehungen* oder *Abschwächungen* entstehen, sind B_n-Sätze.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Satz 2. Durch *Schnitt* von zwei B_n-Sätzen ergibt sich ein B_n-Satz.

Beweis. $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{S}$ und $\overline{\mathfrak{S}}\vee\mathfrak{T}$ seien B_n-Sätze. Ist $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{T}$ ein B_n-Satz, so auch $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}$. Andernfalls enthalten $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$ Disjunktionsglieder $\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{T}^*$, so daß $\mathfrak{R}^*\vee\mathfrak{S}$ und $\overline{\mathfrak{S}}\vee\mathfrak{T}^*$ B_n-Grundformeln sind bzw. aus solchen Grundformeln durch unendliche Induktion entstehen. Dann ist, wie aus der B-Regel hervorgeht, auch $\mathfrak{R}^*\vee\mathfrak{T}^*$ eine B_n-Grundformel bzw. durch unendliche Induktion aus solchen Formeln zu gewinnen. In jedem Falle ist $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}$ ein B_n-Satz.

Satz 3. Ist $\overline{B}(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])\vee\mathfrak{R}$ ein B_n-Satz, so auch $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein B_n-Satz, so auch $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}$. Andernfalls enthält $\mathfrak{R}$ ein Disjunktionsglied $\mathfrak{R}^*$, so daß $\overline{B}(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])\vee\mathfrak{R}^*$ eine B_n-Grundformel ist bzw. aus solchen Grundformeln durch unendliche Induktion entsteht. Dann gilt dasselbe für $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}^*$, und $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}$ ist ein B_n-Satz.

Satz 4. Jede B-Formel, die durch *unendliche Induktion* aus B_n-Sätzen entsteht, ist ein B_n-Satz.

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}\vee B(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ für jeden Term t ein B_n-Satz. Ist $\mathfrak{M}$ ein B_n-Satz, so auch $\mathfrak{M}\vee(x)\,B(\mathfrak{A}[x])$. Andernfalls enthält $\mathfrak{M}$ zu jedem Term t ein Disjunktionsglied $\mathfrak{M}_\mathfrak{t}$, so daß $\mathfrak{M}_\mathfrak{t}\vee B(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ eine B_n-Grundformel ist. Entsteht $\mathfrak{M}^*$ aus $\mathfrak{M}$, indem eventuell auftretende Disjunktionsglieder der Form $B(\mathfrak{C})$ und $(x)B(\mathfrak{D}[x])$ gestrichen werden, so daß $\mathfrak{M}^*$ nur negierte Disjunktionsglieder enthält, so ist offenbar auch $\mathfrak{M}^*\vee B(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ eine B_n-Grundformel. Da dies für jeden Term t gilt, ist $\mathfrak{M}^*\vee(x)B(\mathfrak{A}[x])$ ein B_n-Satz, also auch $\mathfrak{M}\vee(x)B(\mathfrak{A}[x])$.

Satz 5. Jede in Σ_n herleitbare B-Formel ist ein B_n-Satz.

Beweis. $\mathfrak{F}$ sei eine in Σ_n herleitbare B-Formel. In der Herleitung von $\mathfrak{F}$ eliminieren wir alle diejenigen *Schnitte*, deren Schnittglieder nicht von der Gestalt $B(\mathfrak{A})$ oder $(x)B(\mathfrak{B}[x])$ sind. Diese Schnittelimination läßt sich genau so durchführen wie in dem nicht erweiterten System[5]), da sich die Formelbünde der Schnittglieder bei der angegebenen Einschränkung nicht auf B_n-Grundformeln erstrecken. Die so gewonnene *reduzierte Herleitung* der Formel $\mathfrak{F}$ besteht nur aus B-Formeln. Folglich enthält sie als Grundformeln nur B_n-*Grundformeln* und als Schlüsse nur *Vertauschungen, Zusammenziehungen, Abschwächungen, Schnitte, Allschlüsse* und *unendliche Induktionen*. Da jede B_n-Grundformel ein B_n-Satz ist und nach den Sätzen 1 bis 4 durch die angegebenen Schlüsse B_n-Sätze in B_n-Sätze übergehen, enthält die reduzierte Herleitung der Formel $\mathfrak{F}$ nur B_n-Sätze. Somit ist $\mathfrak{F}$ selbst ein B_n-Satz.

Mit Satz 5 läßt sich nun folgendermaßen die *Widerspruchsfreiheit* der Systeme Σ_n beweisen: Wäre Σ_n widerspruchsvoll, so wäre die leere Formel in Σ_n herleitbar, also nach Satz 5 ein B_n-Satz. Gemäß der Definition der B_n-Sätze müßte die leere Formel eine B_n-Grundformel sein. Dies könnte nach der B-Regel nur dann der Fall sein, wenn bereits Σ_{n-1} widerspruchsvoll wäre. Es gibt also kein erstes und somit überhaupt kein widerspruchsvolles System Σ_n.

Satz 6. Bei $0 < m < n$ ist jede B_m-Grundformel zugleich eine B_n-Grundformel.

Beweis durch vollständige Induktion nach m: Zur Gewinnung einer B_m-Grundformel nach der B-Regel sind gewisse Schlüsse in Σ_{m-1} auszuführen.

1. Ist $m = 1$, so enthält Σ_{m-1} nur die gewöhnlichen Grundformeln. Diese sind auch Grundformeln von Σ_{n-1}. Da ferner Σ_{n-1} dieselben Schlußregeln wie Σ_{m-1} besitzt, ist jede B_m-Grundformel zugleich B_n-Grundformel.

2. Es sei $m > 1$, und die Behauptung möge für $m - 1$ gelten. Dann sind die B_{m-1}-Grundformeln, die außer den gewöhnlichen Grundformeln in Σ_{m-1} auftreten, zugleich B_{n-1}-Grundformeln. Daher besitzt Σ_{n-1} alle Herleitungsmöglichkeiten, die in Σ_{m-1} bestehen. Hieraus folgt die Behauptung.

Aus den Sätzen 5 und 6 folgt: *Ist $B(\mathfrak{F})$ in Σ_n herleitbar, so auch $\mathfrak{F}$.*

Beweis. Die Formel $B(\mathfrak{F})$ ist nach Satz 5 nur dann in Σ_n herleitbar, wenn sie ein B_n-Satz ist. Auf Grund der Widerspruchsfreiheit von Σ_n kann $B(\mathfrak{F})$ nicht durch Abschwächung aus einer B_n-Grundformel entstehen, muß also als B_n-Satz selbst eine B_n-Grundformel sein. Das ist nur möglich, wenn $\mathfrak{F}$ in Σ_{n-1} herleitbar ist. Nach Satz 6 ist dann $\mathfrak{F}$ auch in Σ_n herleitbar.

Hiermit haben wir die

Zusatzregel: In jedem System Σ_n darf von $B(\mathfrak{F})$ auf $\mathfrak{F}$ geschlossen werden.

Diese Regel nehmen wir unter den Schlußregeln zur Gewinnung von B_n-Grundformeln auf. Die Sätze 1 bis 5 und die Widerspruchsfreiheit bleiben dabei bestehen. Auch der Satz 6 bleibt gültig, weil die für diesen Satz wesentliche Voraussetzung, daß zur Gewinnung der B_n-Grundformeln für jedes n die *gleichen* Schlußregeln zugelassen sind, gewahrt ist.

[5]) Vgl. die unter [3]) zitierte Arbeit.

Dagegen wäre Satz 6 verletzt, wenn man zur Gewinnung der B_1-Grundformeln den (offenbar richtigen) Satz „$B(\mathfrak{F})$ ist in Σ_0 nicht herleitbar" als Schlußregel hinzunehmen würde. Wir beschränken, um Satz 6 aufrechtzuerhalten, die Schlußregeln zur Gewinnung der B_n-Grundformeln ausdrücklich auf die vorher genannten Regeln einschließlich der Zusatzregel.

Von den Systemen Σ_n gehen wir zu einem umfassenden System über, indem wir die B_n-Grundformeln aller natürlichen Zahlen n als B-Grundformeln zusammenfassen und eine Formel als *herleitbar* bezeichnen, wenn sie in irgendeinem System Σ_n herleitbar ist. Für diesen allgemeinen Herleitungsbegriff gilt folgendes:

I. Aus herleitbaren Formeln entstehen mittels der elementaren Schlußregeln herleitbare Formeln.

Beweis. Es seien etwa $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ herleitbar, d. h. es möge m, n geben, so daß $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}$ in Σ_m und $\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ in Σ_n herleitbar ist. Wir können $m \leq n$ annehmen. Dann ist nach Satz 6 $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ in Σ_n herleitbar. Entsprechendes gilt für die übrigen Schlußregeln.

Auch die vorher genannten Umkehrungen der Schlußregeln sind hier gültig.

II. Ist $\mathfrak{A}[t] \vee \mathfrak{N}$ für jeden Term t in einem System Σ_{n_t} herleitbar, wobei die n_t für alle t *beschränkt* sind, so ist $(x)\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$ herleitbar.

Beweis. Bei $n_t \leq N$ ist nach Satz 6 $\mathfrak{A}[t] \vee \mathfrak{N}$ für jeden Term t in Σ_N herleitbar, also auch $(x)\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$.

Die *unendliche Induktion* steht uns in dem umfassenden System also nur unter der angegebenen Einschränkung zur Verfügung.

Das umfassende System ist *widerspruchsfrei*; denn die leere Formel ist nicht herleitbar, da sie in keinem System Σ_n herleitbar ist.

Wir definieren die „*Konjunktion*" $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ durch $\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}$, die „*Implikation*" $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ durch $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, die „*Äquivalenz*" $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ durch $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$ und die „*Existenzformel*" $(Ex)\mathfrak{A}[x]$ durch $\overline{(x)}\overline{\mathfrak{A}}[x]$.

Bereits in Σ_1 herleitbar sind:
das spezielle tertium non datur

$$\overline{B}(\mathfrak{F}) \vee B(\mathfrak{F}),$$

die Implikation

$$B\big(B(\mathfrak{F})\big) \to B(\mathfrak{F})$$

(auf Grund der Zusatzregel) und die Äquivalenzen

$$B(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \sim B(\mathfrak{F}) \wedge B(\mathfrak{G}),$$
$$B\big((x)\,\mathfrak{F}[x]\big) \sim (x)\,B(\mathfrak{F}[x]).$$

Dagegen gelten für die Negation, Disjunktion und Existenz nicht allgemein die entsprechenden Äquivalenzen, sondern nur die Implikationen

$$B(\overline{\mathfrak{F}}) \to \overline{B}(\mathfrak{F}),$$
$$B(\mathfrak{F}) \vee B(\mathfrak{G}) \to B(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}),$$
$$(Ex)\,B(\mathfrak{F}[x]) \to B\big((Ex)\,\mathfrak{F}[x]\big).$$

Wie wir festgestellt hatten, folgt aus der Herleitbarkeit von $B(\mathfrak{F})$ die Herleitbarkeit von $\mathfrak{F}$. Es gilt auch das Umgekehrte. Ist nämlich $\mathfrak{F}$ in einem System Σ_n herleitbar, so ist $B(\mathfrak{F})$ in Σ_{n+1} herleitbar. Die Formeln $\mathfrak{F}$ und $B(\mathfrak{F})$ sind also *deduktionsgleich*, d.h. jede dieser beiden Formeln ist dann und nur dann herleitbar, wenn auch die andere herleitbar ist. Die Formeln sind aber nicht äquivalent. Es ist weder $B(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}$ noch $B(\mathfrak{F}) \to B(B(\mathfrak{F}))$ allgemein herleitbar, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei $\mathfrak{t}_0$ der Term $\lambda_x \overline{B}(x(x))$. Dann folgt aus $\overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)) \vee B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ durch Abstraktionsschlüsse $\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0) \vee B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ und $\overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)) \vee \overline{\mathfrak{t}}_0(\mathfrak{t}_0)$.

1. Wäre $B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)) \to \mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)$, also $\overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)) \vee \mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)$ herleitbar, so erhielte man durch Schnitte $\overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ und $\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)$. Mit $\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)$ müßte auch $B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ herleitbar sein, und man hätte einen Widerspruch.

2. Aus der in Σ_1 herleitbaren Formel $\overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)) \vee \overline{\mathfrak{t}}_0(\mathfrak{t}_0)$ folgt, daß man in Σ_1 von $B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ auf $\overline{\mathfrak{t}}_0(\mathfrak{t}_0)$ schließen kann. Also ist $\overline{B}(B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))) \vee B(\overline{\mathfrak{t}}_0(\mathfrak{t}_0))$ eine B_2-Grundformel. Durch Schnitt mit den B_1-Grundformeln $\overline{B}(B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))) \vee B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ und $\overline{B}(\overline{\mathfrak{t}}_0(\mathfrak{t}_0)) \vee \overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ ergibt sich $\overline{B}(B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)))$. Wäre $B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)) \to B(B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)))$ herleitbar, so erhielte man $\overline{B}(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$, woraus sich wie vorher mit $\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0)$ und $B(\mathfrak{t}_0(\mathfrak{t}_0))$ ein Widerspruch ergibt.

Wir bezeichnen eine Formel $\mathfrak{A}$ als *„ausgezeichnet"*, wenn die Formeln $\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A} \vee B(\overline{\mathfrak{A}})$ herleitbar sind. Für solche Formeln gelten die Äquivalenzen $\mathfrak{A} \sim B(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathfrak{A}} \sim B(\overline{\mathfrak{A}})$, wie sich aus den Voraussetzungen unter Benutzung der B_1-Grundformel $\overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}) \vee \overline{B}(\mathfrak{A})$ ergibt.

Satz 7. Ist für einen Grundterm φ entweder $\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ oder $\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ eine Grundformel, so ist $\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ eine ausgezeichnete Formel.

Beweis. Ist $\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ bzw. $\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ Grundformel, so ist $B(\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n))$ bzw. $B(\overline{\varphi}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n))$ eine B_1-Grundformel. In jedem Falle sind

$$\overline{\varphi}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee B(\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)) \quad \text{und} \quad \varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee B(\overline{\varphi}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n))$$

in Σ_1 herleitbar.

Ausgezeichnete Formeln lassen sich in folgender Weise zu ausgezeichneten Formeln zusammensetzen:

Satz 8. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ ausgezeichnet, so auch $B(\mathfrak{A})$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bzw. $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n](\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$.

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{A}$ ausgezeichnet. Dann sind die Formeln $B(\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A}))$, $B(\mathfrak{A} \vee \overline{B}(\mathfrak{A}))$ und $B(\mathfrak{A}) \vee B(\overline{\mathfrak{A}})$ herleitbar. Durch Schnitte mit den B_1-Grundformeln

$$\overline{B}(\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A})) \vee \overline{B}(\mathfrak{A}) \vee B(B(\mathfrak{A})) \quad \text{und} \quad \overline{B}(\mathfrak{A} \vee \overline{B}(\mathfrak{A})) \vee \overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}) \vee B(\overline{B}(\mathfrak{A}))$$

ergibt sich $\overline{B}(\mathfrak{A}) \vee B(B(\mathfrak{A}))$ und $B(\mathfrak{A}) \vee B(\overline{B}(\mathfrak{A}))$. Das heißt $B(\mathfrak{A})$ ist ausgezeichnet.

2. Die übrigen Behauptungen ergeben sich aus den Voraussetzungen mit den gewöhnlichen Schlußregeln unter Benutzung der in Σ_1 herleitbaren

Formeln

$$\overline{B}(\mathfrak{A}) \vee B(\overline{\overline{\mathfrak{A}}}),$$

$$\overline{B(\mathfrak{A}) \vee B(\mathfrak{B})} \vee B(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}), \qquad \overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}) \vee \overline{B}(\overline{\mathfrak{B}}) \vee B(\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}),$$

$$\overline{B}(\mathfrak{C}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \vee B(\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n](\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)),$$

$$\overline{B}(\overline{\mathfrak{C}}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \vee B(\overline{\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n]}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)).$$

Satz 9. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ in einem System Σ_n für jeden Term $\mathfrak{t}$ als ausgezeichnet nachweisbar, so auch $(x)\mathfrak{A}[x]$.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus den Voraussetzungen mit den B_1-Grundformeln

$$\overline{(x)}\, B(\mathfrak{A}[x]) \vee B((x)\,\mathfrak{A}[x]), \qquad \overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}[\mathfrak{t}]) \vee B(\overline{(x)}\,\mathfrak{A}[x])$$

durch gewöhnliche Schlüsse.

Führen wir für die „Ausgezeichnetheit" ein Symbol A durch die Definition

$$A(\mathfrak{A}) \equiv B(\{\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A})\} \wedge \{\mathfrak{A} \vee B(\overline{\mathfrak{A}})\})$$

ein, so erhalten wir gemäß den Beweisen zu Satz 8 und 9 die Formeln

$$B(A(\mathfrak{A})) \to A(B(\mathfrak{A}))$$

$$A(\mathfrak{A}) \to A(\overline{\mathfrak{A}})$$

$$A(\mathfrak{A}) \wedge A(\mathfrak{B}) \to A(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$$

$$A(\mathfrak{C}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \to A(\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n](\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n))$$

$$(x)\, A(\mathfrak{A}[x]) \to A((x)\,\mathfrak{A}[x]).$$

Dabei gilt auch die letzte Formel ohne Einschränkung. Eine Einschränkung ist nur erforderlich, wenn aus $A(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ für jeden Term $\mathfrak{t}$ auf $A((x)\mathfrak{A}[x])$ geschlossen werden soll. Dieser Schluß ist aber mit der obigen Formel nur nach unendlicher Induktion möglich.

§ 2. Einführung des Mengenbegriffs.

Wir drücken Mengen und deren Elemente durch Terme aus. Der Term $\mathfrak{a}$ soll dann und nur dann ein Element der durch den Term $\mathfrak{m}$ gegebenen Menge darstellen, wenn die Formel $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ gilt. Jedoch soll nicht jeder Term eine Menge darstellen. Um der klassischen Mathematik möglichst zu entsprechen, verlangen wir von einem „*Mengenterm*" $\mathfrak{m}$, daß nicht nur das tertium non datur für die Formeln $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ gilt, sondern daß auch die Unterscheidung zwischen $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ und $B(\mathfrak{m}(\mathfrak{a}))$, die ja in der klassischen Mathematik nicht auftritt, weitgehend entbehrlich ist. Das wird durch die Forderung erreicht, daß $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ für jeden Term $\mathfrak{a}$ eine ausgezeichnete Formel sein soll. Demgemäß definieren wir $M(\mathfrak{m}) \equiv (x)A(\mathfrak{m}(x))$, d. h. ausführlicher

$$M(\mathfrak{m}) \equiv (x)\, B(\{\overline{\mathfrak{m}}(x) \vee B(\mathfrak{m}(x))\} \wedge \{\mathfrak{m}(x) \vee B(\overline{\mathfrak{m}}(x))\}),$$

wo $M(\mathfrak{m})$ bedeuten soll: „$\mathfrak{m}$ *ist ein Mengenterm*".

Es gelten unter anderem die Formeln

$$M(\mathfrak{m}) \to B\left(\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{m}(\mathfrak{a})\right) \quad \text{und} \quad M(\mathfrak{m}) \to B\left(B(\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})) \vee B(\mathfrak{m}(\mathfrak{a}))\right).$$

Die Sätze 7 bis 9 geben uns Möglichkeiten zur Bildung von Mengentermen.

Die *Vereinigung* bzw. den *Durchschnitt* der durch Mengenterme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ gegebenen Mengen stellen die Mengenterme

$$\lambda_x\{\mathfrak{s}(x) \vee \mathfrak{t}(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_x\{\mathfrak{s}(x) \wedge \mathfrak{t}(x)\}$$

dar. Auch für das *Komplement* zu einem Mengenterm $\mathfrak{t}$ haben wir einen Mengenterm, nämlich $\lambda_x \overline{\mathfrak{t}}(x)$.

Wir definieren

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} \equiv (x)\{\mathfrak{s}(x) \to \mathfrak{t}(x)\}.$$

Es gelten die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\overline{\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}} \vee \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}),$$

$$M(\mathfrak{r}) \wedge M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{r} \subset \mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} \to \mathfrak{r} \subset \mathfrak{t}).$$

Durch die Definition

$$\mathfrak{s} \underset{\mu}{=} \mathfrak{t} \equiv \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t} \subset \mathfrak{s}$$

erhalten wir für Mengenterme eine Gleichheitsrelation mit tertium non datur.

Unter einem „*Prädikat*" verstehen wir einen Ausdruck $\mathfrak{P}[a]$ der aus einer Formel $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$ entsteht, indem ein Term $\mathfrak{t}$ an gewissen Stellen durch die *Nennvariable* a ersetzt wird. Tritt die Nennvariable in $\mathfrak{P}[a]$ nicht auf, so sprechen wir von einem *konstanten Prädikat*. Eine Eigenschaft von Prädikaten möge als „*logisch progressiv*" bezeichnet werden, wenn folgendes gilt:

I. Haben $\mathfrak{P}[a], \mathfrak{Q}[a]$ bzw. $\mathfrak{R}[\mathfrak{t}_1[a], \ldots, \mathfrak{t}_n[a], a]$ diese Eigenschaft, so auch $\overline{\mathfrak{P}}[a]$, $\mathfrak{P}[a] \vee \mathfrak{Q}[a]$ bzw. $\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n, a]$ $(\mathfrak{t}_1[a], \ldots, \mathfrak{t}_n[a])$.

II. Ist in einem System Σ_n zu jedem Term $\mathfrak{t}$ die Eigenschaft für $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}, a]$ nachweisbar, so auch für $(x)\mathfrak{P}[x, a]$.

Von Prädikaten, die sich auf Mengen beziehen sollen, hat man zu verlangen, daß $\mathfrak{P}[\mathfrak{s}]$ äquivalent zu $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$ ist, wenn $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ gleiche Mengen darstellen. Wir verlangen außerdem, daß $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$ für jeden Mengenterm $\mathfrak{t}$ eine ausgezeichnete Formel ist. Demgemäß bezeichnen wir $\mathfrak{P}[a]$ als „*Mengenprädikat*", wenn die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to A(\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\mu}{=} \mathfrak{t} \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{s}] \sim \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]\})$$

für alle Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ herleitbar sind.

Mengenprädikate sind insbesondere

a) alle ausgezeichneten Formeln (als konstante Prädikate),

b) $a(\mathfrak{t})$ für jeden Term $\mathfrak{t}$,

c) $a \subset \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \subset a$ für jeden Mengenterm $\mathfrak{m}$.

Ferner ist die Mengenprädikateigenschaft ohne Schwierigkeit als *logisch progressiv* nachweisbar.

Mengen von Paaren stellen wir ebenfalls durch Terme dar, wobei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein Element von $\mathfrak{m}$ sein soll, wenn $\mathfrak{m}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gilt. Die Aussage „$\mathfrak{m}$ *stellt eine Paarmenge dar*" wird durch

$$M_2(\mathfrak{m}) \equiv (x)\,(y)\,A\big(\mathfrak{m}(x, y)\big)$$

gegeben. Entsprechend sind $M_3, M_4, \ldots$ zu definieren.

Ein Mengenterm $\mathfrak{m}$ soll als Repräsentant einer *Menge von Mengen* angesehen werden, wenn $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ nur auf Mengenterme $\mathfrak{a}$ zutrifft. Die genaue Definition der Aussage „$\mathfrak{m}$ *stellt eine Menge von Mengen dar*", die wir durch $M^2(\mathfrak{m})$ ausdrücken, lautet:

$$M^2(\mathfrak{m}) \equiv M(\mathfrak{m}) \wedge (x)\,B\big(\mathfrak{m}(x) \to (y)\,\{\{\bar{x}(y) \vee B(x(y))\} \wedge \{x(y) \vee B(\bar{x}(y))\}\}\big).$$

Bei einer Menge von Mengen läßt sich die *Vereinigung*

$$\bigcup \mathfrak{m} \equiv \lambda_x (E\,y)\,\{\mathfrak{m}(y) \wedge y(x)\}$$

und der *Durchschnitt*

$$\bigcap \mathfrak{m} \equiv \lambda_x (y)\,\{\mathfrak{m}(y) \to y(x)\}$$

bilden. Allgemein gelten nämlich die Formeln

$$M^2(\mathfrak{m}) \to M(\bigcup \mathfrak{m}),$$

$$M^2(\mathfrak{m}) \to M(\bigcap \mathfrak{m}).$$

Beweis. Aus der Annahme, daß für alle Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ die Formeln

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s}) \vee B\big(\mathfrak{m}(\mathfrak{s})\big), \quad \mathfrak{m}(\mathfrak{s}) \vee B\big(\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s})\big), \quad \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s}) \vee \bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\mathfrak{s}(\mathfrak{t})\big), \quad \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s}) \vee \mathfrak{s}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{t})\big)$$

gelten, können wir unter Benutzung von B_1-Grundformeln auf

$$\overline{\bigcup \mathfrak{m}}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\bigcup \mathfrak{m}(\mathfrak{t})\big), \quad \bigcup \mathfrak{m}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\overline{\bigcup \mathfrak{m}}(\mathfrak{t})\big)$$

und die entsprechenden Formeln für den Durchschnitt schließen. Die Behauptungen ergeben sich dann aus B_2-Grundformeln durch unendliche Induktion in Σ_2.

Eine *Abzählung* der Mengenterme ist nicht möglich, da die Abgrenzung der Mengenterme unter Bezugnahme auf die Deduzierbarkeit mit weitgehend zugelassener unendlicher Induktion vorgenommen wurde. Die unendliche Induktion ermöglicht es, in jedem System Σ_n bei Einführung einer Herleitungsordnung zu jeder beliebig großen konstruktiv gegebenen Ordnungszahl der zweiten Zahlenklasse Herleitungen zu bilden. Da die Gesamtheit dieser Ordnungszahlen nicht finit erfaßt werden kann, ist eine finite Abzählung aller Herleitungen und ebenso aller Mengenterme unmöglich.

Ferner ist die Annahme widerlegbar, daß die Gesamtheit der *Mengen*[6]) eines Systems Σ_n abzählbar sei, wenn man von einer solchen Abzählung verlangt, daß ein Funktionsterm $\mathfrak{f}[a]$ existiert mit den Eigenschaften:

[6]) Wir beziehen uns nicht auf *Mengenterme*, sondern auf *Mengen*, indem wir bei der 2. und 3. Forderung die Mengengleichheit verwenden.

1. Für jeden Term t ist $\mathfrak{f}[t]$ ein Mengenterm aus Σ_n.

2. Zu jedem Mengenterm $\mathfrak{m}$ aus Σ_n gibt es einen Term t mit $\mathfrak{m} =_{\mu} \mathfrak{f}[t]$.

3. Aus $\mathfrak{s} = t$ folgt $\mathfrak{f}[\mathfrak{s}] =_{\mu} \mathfrak{f}[t]$[7]).

Bereits ohne Benutzung der für die Abzählung wesentlichen dritten Forderung ergibt sich der Widerspruch: Nach 1. ist $\mathfrak{f}[t](t)$ für jeden Term t in Σ_n als ausgezeichnet nachweisbar, also auch $\overline{\mathfrak{f}[t]}(t)$. Dann ist $\lambda_x \overline{\mathfrak{f}[x]}(x)$ ein Mengenterm $\mathfrak{m}_0$ aus Σ_n. Für jeden Term t ist $\mathfrak{m}_0(t) \vee \mathfrak{f}[t](t)$, $\overline{\mathfrak{m}}_0(t) \vee \overline{\mathfrak{f}[t]}(t)$ und somit $\overline{\mathfrak{m}_0 =_{\mu} \mathfrak{f}[t]}$ herleitbar, was gegen 2. verstößt.

Die Unerfüllbarkeit der Forderungen 1. und 2. bedeutet, daß nicht einmal eine *Abbildung* aller Terme auf die Mengen von Σ_n angegeben werden kann.

§ 3. Einbeziehung der verzweigten Typenlogik.

Der im § 2 eingeführte Mengenbegriff ist so umfassend, daß jede Menge, die sich in der verzweigten Typenlogik unter Zugrundelegung entscheidbarer Prädikate definieren läßt, unter diesen Begriff fällt. Um das zu zeigen, entwickeln wir in ähnlicher Weise, wie es ACKERMANN[8]) getan hat, über gegebenen entscheidbaren Grundprädikaten eine verzweigte Typenlogik als Teilsystem des vorliegenden typenfreien Systems.

Erklärung der *Typen* und deren *Ordnungen*:

1. Typ der Ordnung 0 ist die Zahl „0".

2. Sind $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ Typen von Ordnungen $< \nu$, so ist $\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein Typ der Ordnung ν.

Die Ordnungen der Typen sind natürliche Zahlen.

Erklärung der τ-*Grundterme*: Gegeben sei eine gewisse Menge von Grundtermen, die wir einteilen in *Individuengrundterme*, *Prädikatengrundterme* mit jeweils zugeordneter Stellenzahl und *Typengrundterme*. Diese drei Arten sollen sich nicht überschneiden, und es soll zu jedem Typ ϱ genau einen Typengrundterm τ_ϱ geben.

Erklärung der τ-*Terme* und ihrer Typen:

1. Jeder Individuengrundterm ist ein τ-Term vom Typ 0.

2. Jeder n-stellige Prädikatengrundterm ist ein τ-Term vom Typ 1 (0, ..., 0) mit n Nullen.

3. Ist $\mathfrak{A}[t_1, \ldots, t_n]$ eine τ-Formel der Ordnung ν und sind $t_1, \ldots, t_n$ τ-Terme der Typen $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ von den Ordnungen $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so ist

$$\lambda_{x_1 \ldots x_n} \{\tau_{\varrho_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \tau_{\varrho_n}(x_n) \wedge \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

ein τ-Term vom Typ $\nu^*(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$, wo ν^* das Maximum von $\nu, \mu_1 + 1, \ldots, \mu_n + 1$ ist.

Diese Erklärung ist simultan zu nehmen mit der Erklärung der τ-*Formeln* und ihrer Ordnungen:

[7]) Bei $\mathfrak{s} = t$ ist die im § 4 erklärte Gleichheit gemeint.

[8]) ACKERMANN: Math. Z. **57**, 159—163 (1953).

1. Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ τ-Terme der Typen $\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ bzw. $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, so ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ eine τ-Formel der Ordnung ν.

2. Ist $\mathfrak{A}$ eine τ-Formel der Ordnung ν, so auch $\overline{\mathfrak{A}}$.

3. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Formeln der Ordnungen μ, ν, so ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ eine τ-Formel, deren Ordnung das Maximum von μ, ν ist.

4. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ eine τ-Formel der Ordnung ν und $\mathfrak{t}$ ein τ-Term vom Typ ϱ der Ordnung μ, so ist

$$(x)\{\overline{\tau}_\varrho(x) \vee \mathfrak{A}[x]\}$$

eine τ-Formel, deren Ordnung das Maximum von ν und $\mu + 1$ ist.

Erklärung der *τ-Grundformeln*:

1. Die Prädikatengrundterme sollen für die Individuengrundterme als Argumente entscheidbar sein. Demgemäß setzen wir voraus: Ist φ ein n-stelliger Prädikatengrundterm und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Individuengrundterme, so ist in jedem Falle entweder $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oder $\overline{\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Grundformel (in entscheidbarer Weise).

2. Es sei $\tau_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel, wenn $\mathfrak{t}$ ein τ-Term vom Typ ϱ ist[9]), und $\overline{\tau}_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel, wenn $\mathfrak{t}$ ein beliebiger anderer Term ist, und zwar auch dann, wenn $\mathfrak{t}$ nicht τ-Term ist.

Der Satz, auf den es uns ankommt, lautet:

Jeder τ-Term der Form $\lambda_x \mathfrak{P}[x]$ ist ein Mengenterm.

Beweis. Jeder τ-Term $\lambda_x \mathfrak{P}[x]$ ist von der Gestalt $\lambda_x\{\tau_\varrho(x) \wedge \mathfrak{G}[x]\}$, wo $\mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ für jeden τ-Term $\mathfrak{t}$ vom Typ ϱ eine τ-Formel ist. Nach Satz 8 handelt es sich um einen Mengenterm, wenn $\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ für jeden Term $\mathfrak{t}$ ausgezeichnet ist.

1. $\mathfrak{t}$ sei nicht ein τ-Term vom Typ ϱ. Dann ist $\overline{\tau}_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel. Folglich sind $\overline{\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]}$ und $B\left(\overline{\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]}\right)$ herleitbar, und $\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ ist ausgezeichnet.

2. $\mathfrak{t}$ sei ein τ-Term vom Typ ϱ. Dann ist $\tau_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel. Ist die τ-Formel $\mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ ausgezeichnet, so nach Satz 8 auch $\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$. Es ist also nur noch zu beweisen:

Jede τ-Formel ist ausgezeichnet.

Um einen Induktionsbeweis für diesen Satz zu führen, definieren wir:

Der *Rang* einer τ-Formel $\mathfrak{F}$ sei die Anzahl derjenigen in $\mathfrak{F}$ auftretenden Terme, deren Typen die gleiche Ordnung wie $\mathfrak{F}$ haben. (Terme höherer Ordnung können in einer τ-Formel nicht auftreten.)

Der *Grad* einer τ-Formel $\mathfrak{F}$ sei die Anzahl derjenigen in $\mathfrak{F}$ auftretenden logischen Zeichen $\vee, \overline{\ }, (x)$, die nicht Bestandteile eines Terms sind.

Wir beweisen die Ausgezeichnetheit der τ-Formel $\mathfrak{F}$ durch Induktion nach Ordnung, Rang und Grad (in dieser Reihenfolge).

I. $\mathfrak{F}$ sei von der Gestalt $\mathfrak{F}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$.

a) $\mathfrak{F}$ sei Prädikatengrundterm. Dann müssen $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ Individuengrundterme sein, und $\mathfrak{F}$ ist nach Satz 7 ausgezeichnet.

[9]) Hierbei handelt es sich um eine in elementarer Weise entscheidbare Eigenschaft des Terms $\mathfrak{t}$.

b) $\mathfrak{s} \equiv \lambda_{x_1 \ldots x_n} \{\tau_{\varrho_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \tau_{\varrho_n}(x_n) \wedge \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\}$.

Die τ-Formel $\mathfrak{A}[t_1, \ldots, t_n]$ hat entweder kleinere Ordnung als $\mathfrak{F}$ oder gleiche Ordnung und kleineren Rang, kann also nach Induktionsvoraussetzung als ausgezeichnet angenommen werden. Die $\tau_{\varrho_i}(t_i)$ sind Grundformeln, also ebenfalls ausgezeichnet. Dann ist nach Satz 8 auch $\mathfrak{F}$ ausgezeichnet.

II. $\mathfrak{F}$ sei von der Gestalt $\overline{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$. Die Formeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ haben entweder kleinere Ordnung als $\mathfrak{F}$, oder sie haben gleiche Ordnung, nicht höheren Rang und kleineren Grad als $\mathfrak{F}$. Nach Induktionsvoraussetzung und Satz 8 ist $\mathfrak{F}$ ausgezeichnet.

III. $\mathfrak{F}$ sei von der Gestalt $(x)\{\overline{\tau}_\varrho(x) \vee \mathfrak{A}[x]\}$. Nach Satz 9 genügt es, die Formeln $\overline{\tau}_\varrho(t) \vee \mathfrak{A}[t]$ für alle Terme t in dem System Σ_1 (auf das wir uns hier allgemein beschränken können) als ausgezeichnet nachzuweisen.

a) Ist t nicht ein τ-Term vom Typ ϱ, so ist $\overline{\tau}_\varrho(t)$ Grundformel, folglich $\overline{\tau}_\varrho(t) \vee \mathfrak{A}[t]$ herleitbar und somit ausgezeichnet.

b) Ist t ein τ-Term vom Typ ϱ, so ist $\mathfrak{A}[t]$ eine τ-Formel. Hat der Typ von t kleinere Ordnung als $\mathfrak{A}[t]$, so hat $\mathfrak{A}[t]$ gleiche Ordnung und gleichen Rang wie $\mathfrak{F}$, aber kleineren Grad. Andernfalls hat $\mathfrak{A}[t]$ kleinere Ordnung als $\mathfrak{F}$. In jedem Falle ist $\mathfrak{A}[t]$ nach Induktionsvoraussetzung ausgezeichnet. Da außerdem $\tau_\varrho(t)$ als Grundformel ausgezeichnet ist, so ist nach Satz 8 auch $\overline{\tau}_\varrho(t) \vee \mathfrak{A}[t]$ ausgezeichnet.

Hiermit ist der Induktionsbeweis beendet.

§ 4. Einführung der Arithmetik[10]).

Das Symbol „0" möge einen bestimmten Grundterm darstellen, der im folgenden festgehalten wird. *Das Strichsymbol* bezeichne einen irgendwie ausgewählten Prozeß, der jedem Term t einen Term t′ zuordnet, so daß t′ den Term t als echten Bestandteil enthält. Zum Beispiel kann $\lambda_x\, t(x)$ für t′ genommen werden. Als *„Ziffern"* werden dann die Terme 0, 0′, 0″, ... erklärt.

Unter einer n-stelligen *berechenbaren Funktion* verstehen wir eine Vorschrift, die jedem n-tupel von Ziffern eine eindeutig berechenbare Ziffer als *Funktionswert* zuordnet. Es seien gewisse derartige Funktionen gegeben, darunter die *Nachfolgerfunktion*, die der Ziffer $\mathfrak{z}$ den Funktionswert $\mathfrak{z}'$ zuordnet.

Zur Formalisierung dieser Funktionen verwenden wir *„Nennvariablen"* $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Aus einem Term $\mathfrak{f}[t_1, \ldots, t_n]$, in dem die Terme $t_1, \ldots, t_n$ als Bestandteile auftreten, wird ein n-stelliger *Funktionsterm* $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$ gebildet, indem die Terme $t_1, \ldots, t_n$ an den Stellen, an denen sie in $\mathfrak{f}[t_1, \ldots, t_n]$ gemäß dieser Schreibweise auftreten, durch die Nennvariablen $a_1, \ldots, a_n$ ersetzt werden. Jeder gegebenen n-stelligen berechenbaren Funktion ordnen wir einen n-stelligen Funktionsterm zu, insbesondere der Nachfolgerfunktion den Funktionsterm a_1'. Diese Zuordnung soll so getroffen werden, daß je zwei Terme $\mathfrak{f}[\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_m]$, $\mathfrak{g}[t_1, \ldots, t_n]$, die durch Einsetzungen von Termen für

[10]) Um sortenbeschränkende Prädikate zu vermeiden, wird hier ein etwas anderer Weg eingeschlagen, als ihn ACKERMANN für sein System angegeben hat [Math. Z. **57**, 158—159, 163—165 (1953)].

Nennvariablen aus zugeordneten Funktionstermen $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_m]$, $\mathfrak{g}[a_1, \ldots, a_n]$ entstehen, nur dann formal übereinstimmen, wenn die zugehörigen Funktionen und die entsprechenden Terme $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{t}_i$ übereinstimmen. Diese Bedingung ist leicht zu erfüllen, da viele Möglichkeiten für die Bildung von Funktionstermen bestehen. Die den berechenbaren Funktionen zugeordneten Funktionsterme nennen wir *„berechenbare Funktionsterme"*.

Um mit den Termen als Repräsentanten der natürlichen Zahlen zu rechnen, ordnen wir den Termen in folgender Weise *Ziffernwerte* zu:

a) Ein Term erhält den Wert 0, wenn er nicht durch Einsetzungen von Termen für Nennvariablen aus einem berechenbaren Funktionsterm entsteht.

b) Sind $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ Terme mit den Werten $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$, und gehört der Funktionsterm $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$ zu einer berechenbaren Funktion, die dem n-tupel $(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ den Funktionswert $\mathfrak{z}$ zuordnet, so erhält $\mathfrak{f}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ den Wert $\mathfrak{z}$.

Die bei der Zuordnung der Funktionsterme zu beachtende Bedingung sichert die Eindeutigkeit der Wertezuordnung.

Für die Auffassung der Terme als Repräsentanten natürlicher Zahlen gebrauchen wir Grundterme „$=$" und „$\leqq_\nu$" mit folgenden Grundformeln: $=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$ bzw. $\overline{=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)}$ sei Grundformel, je nachdem $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ gleiche oder verschiedene Werte haben. $\leqq_\nu(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$ sei Grundformel, wenn der Wert von $\mathfrak{t}_1$ ein echter Bestandteil des Wertes von $\mathfrak{t}_2$ ist. Andernfalls soll $\overline{\leqq_\nu(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)}$ Grundformel sein. Statt

$$=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2), \quad \overline{=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)}, \quad \leqq_\nu(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2), \quad \leqq_\nu(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2) \vee =(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$$

werden wir

$$\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \neq \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \leqq_\nu \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \leqq_\nu \mathfrak{t}_2$$

schreiben.

Unter den gegebenen berechenbaren Funktionen möge die *Summe* und das *Produkt* (im Sinne der Ziffern als natürlicher Zahlen) vorkommen. Die zugehörigen Funktionsterme bezeichnen wir mit $a_1 +_\nu a_2$ bzw. $a_1 ;_\nu a_2$. Hierfür sind die zahlentheoretischen Grundgesetze wie z. B.

$$\mathfrak{s} ;_\nu \mathfrak{t} = \mathfrak{t} ;_\nu \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} \leqq_\nu \mathfrak{t} \to \mathfrak{s}' \leqq_\nu \mathfrak{t}$$

mit beliebigen Termen $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ herleitbar. Einer Sortenbeschränkung auf Ziffern bedarf es nicht, da sich die Grundterme „$=$" und „$\leqq_\nu$" gemäß der vorgenommenen Wertezuordnung auf eine Deutung *aller* Terme als natürlicher Zahlen beziehen.

Durch Wahl einer geeigneten Abbildung mögen außerdem die Ziffern als rationale Zahlen interpretiert werden. Die Funktionsterme der Addition und Multiplikation, die sich auf diese Interpretation beziehen, bezeichnen wir mit $a_1 + a_2$ bzw. $a_1 \cdot a_2$. Die entsprechende Ordnungsrelation werde durch einen Grundterm „$<$" dargestellt. Für Terme $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ mit den Werten $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ soll $\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_2$ (als Abkürzung für $<(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$) Grundformel sein, wenn im Sinne der Interpretation als rationale Zahlen $\mathfrak{z}_1$ kleiner als $\mathfrak{z}_2$ ist. Andernfalls gilt $\overline{\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_2}$ als Grundformel. Hiermit erhalten wir (wiederum ohne sortenbeschränkende

Zusätze) alle Grundgesetze der rationalen Zahlen. Der jeweils gemeinte Variabilitätsbereich wird lediglich durch die Funktionsterme und die als Ordnungsrelationen fungierenden Grundterme gekennzeichnet. Dabei haben wir dasselbe Gleichheitszeichen für die Bereiche der natürlichen Zahlen und der rationalen Zahlen. Es ist allgemein $t = t$, aber nicht immer $\mathfrak{s} = t \to \{\mathfrak{A}[\mathfrak{s}] \to \mathfrak{A}[t]\}$ herleitbar.

Wir bezeichnen ein Prädikat $\mathfrak{P}[a]$ als *„arithmetisch"*, wenn die Formel

$$\mathfrak{s} = t \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{s}] \sim \mathfrak{P}[t]\}$$

für alle Terme $\mathfrak{s}$, t herleitbar ist.

Arithmetische Prädikate sind insbesondere:

a) Alle konstanten Prädikate, für die das tertium non datur gilt,

b) $\mathfrak{s}[a] = t[a]$, $\mathfrak{s}[a] \leqq_{\nu} t[a]$ und $\mathfrak{s}[a] < t[a]$, wenn $\mathfrak{s}[a]$, $t[a]$ aus berechenbaren Funktionstermen durch Einsetzungen beliebiger Terme und der Nennvariablen a entstehen bzw. beliebige Terme sind, welche a nicht enthalten.

Die Eigenschaft, arithmetisch zu sein, erweist sich als *logisch progressiv*. Außerdem überträgt sie sich von $\mathfrak{P}[a]$ auf $B(\mathfrak{P}[a])$. Ist nämlich $\mathfrak{P}[a]$ arithmetisch, so läßt sich mit der B-Regel auf

$$B(\mathfrak{s} = t) \to \{B(\mathfrak{P}[\mathfrak{s}]) \sim B(\mathfrak{P}[t])\}$$

schließen. Gemäß Satz 7 gilt

$$\mathfrak{s} = t \to B(\mathfrak{s} = t),$$

womit sich auch $B(\mathfrak{P}[a])$ als arithmetisch ergibt.

Die unter a) genannten konstanten Prädikate, für die das tertium non datur gilt, lassen sich unter anderem in folgender Weise bilden:

I. Das tertium non datur gilt

a) für die Formeln $\mathfrak{s} = t$, $\mathfrak{s} \leqq_{\nu} t$, $\mathfrak{s} < t$ mit beliebigen Termen $\mathfrak{s}$, t,

b) für alle Formeln der Gestalt $B(\mathfrak{A})$.

II. Gilt das tertium non datur für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}[t_1, \ldots, t_n]$, so auch für $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bzw. $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n]\,(t_1, \ldots, t_n)$.

III. Ist in einem System Σ_n zu jedem Term t das tertium non datur für $\mathfrak{A}[t]$ nachweisbar, so auch für $(x)\mathfrak{A}[x]$.

Die *vollständige Induktion* steht uns in folgender Weise zur Verfügung:

Ist $\mathfrak{P}[a]$ *ein arithmetisches Prädikat, so gilt*

$$\mathfrak{P}[0] \wedge (x)\{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\} \to \mathfrak{P}[t]$$

für jeden Term t.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, da allgemein $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$ gilt, $\overline{\mathfrak{P}}[\mathfrak{s}] \vee \mathfrak{P}[\mathfrak{s}]$ für jeden Term $\mathfrak{s}$. Mit solchen Formeln erhält man

$$\overline{\mathfrak{P}}[0] \vee \overline{\overline{\mathfrak{P}}[0] \vee \mathfrak{P}[0']} \vee \cdots \vee \overline{\overline{\mathfrak{P}}[0^{(n-1)}] \vee \mathfrak{P}[0^{(n)}]} \vee \mathfrak{P}[0^{(n)}]$$

und weiterhin

$$\mathfrak{P}[0] \wedge (x)\{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\} \to \mathfrak{P}[\mathfrak{z}]$$

für jede Ziffer $\mathfrak{z}$. Hat $\mathfrak{t}$ den Wert $\mathfrak{z}$, so gilt $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}$, und aus der Voraussetzung folgt $\mathfrak{P}[\mathfrak{z}] \to \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$. Mit einem Schnitt ergibt sich die behauptete Formel.

Ohne die Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}[a]$ arithmetisch ist, hat man nur den Satz: *Ist* $\mathfrak{P}[0]$ *und* $(x)\{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\}$ *herleitbar, so auch* $\mathfrak{P}[\mathfrak{z}]$ *für jede Ziffer* $\mathfrak{z}$.

Demgemäß hat man allgemein die B_1-Grundformel

$$\overline{B}(\mathfrak{P}[0]) \vee \overline{(x)}\, B(\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']) \vee B(\mathfrak{P}[\mathfrak{z}])$$

für jede Ziffer $\mathfrak{z}$.

§ 5. Einführung der Analysis.

Die *reellen Zahlen* gewinnen wir durch eine Klasseneinteilung der Mengenterme, wobei diese Terme als Mengen rationaler Zahlen aufzufassen sind. Wir definieren

$$\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \equiv (x)\,(y)\,\{\overline{\mathfrak{t}(x) \vee x < y} \vee \overline{(z)}\,\{\overline{\mathfrak{s}(z)} \vee y < z\}\}.$$

Dann gelten die Formeln

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\overline{\mathfrak{s} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{t}} \vee \mathfrak{s} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{t})$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \vee \mathfrak{t} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{s})$$

$$M(\mathfrak{r}) \wedge M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{r} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \to \mathfrak{r} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t}).$$

Erklären wir nun $\mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t}$ als die Konjunktion $\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{t}$ als die Negation $\overline{\mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s}}$, so erhalten wir mit „$\underset{\varrho}{=}$“ eine Äquivalenzrelation und mit „$\underset{\varrho}{<}$“ eine Ordnungsrelation für Mengenterme. Mit diesen Relationen werden die reellen Zahlen einschließlich $+\infty$ und $-\infty$ gegeben. Wir können

$$-\infty \equiv \lambda_x\, x = x \quad \text{und} \quad +\infty \equiv \lambda_x\, x \neq x$$

setzen. Dann gelten für jeden Mengenterm $\mathfrak{m}$ die Formeln

$$-\infty \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m} \underset{\varrho}{\leqq} +\infty.$$

Ein Mengenterm $\mathfrak{r}$, für den die Formeln $-\infty \underset{\varrho}{<} \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} \underset{\varrho}{<} +\infty$ herleitbar sind, stellt eine *eigentliche reelle Zahl* dar. Der als rationale Zahl aufgefaßte Term $\mathfrak{a}$ entspricht der eigentlichen reellen Zahl, die durch den Term $\lambda_x\, \mathfrak{a} < x$ dargestellt wird.

Eine *Menge reeller Zahlen* wird durch einen Term $\mathfrak{m}$ gegeben, der eine Menge von Mengen darstellt. Als *untere Grenze* zu einem solchen Term $\mathfrak{m}$ haben wir den Mengenterm $\cup\mathfrak{m}$. Es gelten die Formeln

$$M^2(\mathfrak{m}) \to B\,(\mathfrak{m}(\mathfrak{t}) \to \cup\mathfrak{m} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t}),$$

$$M^2(\mathfrak{m}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B\,((x)\,\{\mathfrak{m}(x) \to \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} x\} \to \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \cup\mathfrak{m}).$$

Wir bezeichnen $\mathfrak{P}[a]$ als *„reelles Prädikat“*, wenn die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to A(\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t} \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{s}] \sim \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]\})$$

für alle Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ gelten. Reelle Prädikate sind insbesondere

a) alle ausgezeichneten Formeln (als konstante Prädikate),

b) $a \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \underset{\varrho}{\leqq} a$ für jeden Mengenterm $\mathfrak{m}$.

Jedes reelle Prädikat ist ein Mengenprädikat, da die Formel

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\mu}{=} \mathfrak{t} \to \mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t})$$

herleitbar ist. Umgekehrt lassen sich aus Mengenprädikaten in folgender Weise reelle Prädikate gewinnen. Als den durch $\mathfrak{t}$ bestimmten *Dedekindschen Schnitt* definieren wir

$$\sigma(\mathfrak{t}) \equiv \lambda_x (E\,y)\,\{\mathfrak{t}(y) \wedge y < x\}.$$

Dann sind die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to M\big(\sigma(\mathfrak{t})\big),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B\big(\mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t} \to \sigma(\mathfrak{s}) \underset{\mu}{=} \sigma(\mathfrak{t})\big)$$

herleitbar. Daraus folgt:

Satz 10. Ist $\mathfrak{P}[a]$ ein Mengenprädikat, so ist $\mathfrak{P}[\sigma(a)]$ ein reelles Prädikat.

Weitere Möglichkeiten zur Bildung reeller Prädikate ergeben sich daraus, daß es sich auch hier um eine *logisch progressive* Eigenschaft der Prädikate handelt, wie man ohne Schwierigkeit feststellt.

Entsprechend wie die einstelligen reellen Prädikate werden die mehrstelligen reellen Prädikate $\mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$ erklärt. Offenbar ist $\mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$ ein n-stelliges reelles Prädikat, wenn $\mathfrak{P}[a, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}_1, a, \mathfrak{t}_3, \ldots, \mathfrak{t}_n], \ldots,$ $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{n-1}, a]$ für alle Mengenterme $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ einstellige reelle Prädikate sind. Für die mehrstelligen reellen Prädikate bestehen die entsprechenden Bildungsmöglichkeiten wie für die einstelligen.

Unter einer n-stelligen *reellen Funktion* verstehen wir einen Funktionsterm $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$, für den die Formeln

$$M(\mathfrak{t}_1) \wedge \cdots \wedge M(\mathfrak{t}_n) \to M(\mathfrak{f}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]),$$

$$\begin{cases} M(\mathfrak{s}_1) \wedge \cdots \wedge M(\mathfrak{s}_n) \wedge M(\mathfrak{t}_1) \wedge \cdots \wedge M(\mathfrak{t}_n) \to \\ B(\mathfrak{s}_1 \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{s}_n \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t}_n \to \mathfrak{f}[\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n] \underset{\varrho}{=} \mathfrak{f}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \end{cases}$$

mit beliebigen Termen $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ herleitbar sind. Dabei lassen wir auch zu, daß nicht alle Nennvariablen $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$ auftreten. Dann kann jede n-stellige Funktion zugleich als eine höherstellige Funktion aufgefaßt werden. Man beweist ohne Schwierigkeit:

Satz 11. Ist $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}, a_1, \ldots, a_n]$ in einem System Σ_n für jeden Term $\mathfrak{t}$ als reelles Prädikat nachweisbar, so ist $\lambda_x \mathfrak{P}[x, a_1, \ldots, a_n]$ eine reelle Funktion.

Besondere reelle Funktionen sind:

1. Die *konstanten Funktionen*, die keine Nennvariablen enthalten. Sie werden durch beliebige Mengenterme gegeben.

2. Die *uneigentlichen Funktionen* $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$, bei denen $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n](\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{t}$ unabhängig ist[11]). Sie werden gegeben in der Form $\lambda_x \mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$, wo $\mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$ ein reelles Prädikat ist (das x nicht enthält).

Die Addition und Multiplikation reeller Zahlen läßt sich einführen durch die Definitionen

$$a_1 \underset{\varrho}{+} a_2 \equiv \lambda_x \overline{(y)}\,(z)\,\{x < y - z \vee \bar{\sigma}(a_1)\,(y) \vee \bar{\sigma}(a_2)\,(z)\}$$

$$a_1 \underset{\varrho}{;} a_2 \equiv \lambda_x \overline{(y)}\,(z)\,\{x < y \cdot z \vee \{\sigma(a_1)\,(y) \sim \sigma(a_2)\,(-z)\} \vee \{\sigma(a_1)\,(-y) \sim \sigma(a_2)\,(z)\}\}.$$

Auf Grund der Progressivität der Mengenprädikateigenschaft und der Sätze 10 und 11 erweisen sich $a_1 \underset{\varrho}{-} a_2$ und $a_1 \underset{\varrho}{;} a_2$ als zweistellige reelle Funktionen (da $\mathfrak{s} < \mathfrak{t}$ und $a(\mathfrak{t})$ für alle Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ Mengenprädikate sind). Für Mengenterme lassen sich mit diesen Funktionen die Körpergesetze nachweisen. —

Bei den Beweisführungen innerhalb der hier entwickelten Analysis ist zu beachten:

1. Die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen besteht nur für die hier zugelassenen Mengen reeller Zahlen. Das heißt: Nur zu einem Mengenterm $\mathfrak{m}$, für den $M^2(\mathfrak{m})$ gilt, gibt es eine reelle Zahl $\cup\mathfrak{m}$ als untere Grenze.

2. Ein Term $\mathfrak{s}$, der einen Bestandteil der Form $M(\mathfrak{u})$ enthält, ist im allgemeinen kein Mengenterm, da $M(\mathfrak{t})$ nicht für alle Terme $\mathfrak{t}$ als ausgezeichnet nachweisbar ist. Das bedeutet, daß ein Ausdruck, der unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen definiert ist, im allgemeinen keine reelle Zahl darstellt. (Eine solche Definitionsmöglichkeit ist in der verzweigten Analysis überhaupt ausgeschlossen.)

Trotz dieser Einschränkungen, die gegenüber der naiven Analysis bestehen, dürften die Fundamentalsätze der Analysis bei geeigneten Formulierungen in dem vorliegenden System herleitbar sein. Die hierzu erforderlichen Abwandlungen der klassischen Beweise werden im allgemeinen in ähnlicher Weise vorzunehmen sein, wie dies LORENZEN[12]) für die verzweigte Analysis ausgeführt hat.

§ 6. Der Überdeckungssatz von HEINE-BOREL.

Als Beispiel für die Herleitung eines Fundamentalsatzes der Analysis geben wir eine Herleitung des *Überdeckungssatzes von* HEINE-BOREL, wobei wir uns der Einfachheit halber auf *eine* Dimension beschränken.

Für eine reelle Zahl $\mathfrak{r}$ und rationale Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ werden die Aussagen „$\mathfrak{r}$ *liegt in dem abgeschlossenen Intervall* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$“ und „$\mathfrak{r}$ *liegt in dem offenen Intervall* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$“ wiedergegeben durch

$$\mathfrak{r} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \equiv (y)\,\{\mathfrak{r}(y) \to \mathfrak{a} \leq y\} \wedge (y)\,\{\mathfrak{b} < y \to (Ez)\,\{\mathfrak{r}(z) \wedge z < y\}\}$$

$$\mathfrak{r} \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (Ey)\,\{\mathfrak{a} < y \wedge (z)\,\{\mathfrak{r}(z) \to y \leq z\}\} \wedge (Ey)\,\{\mathfrak{r}(y) \wedge y < \mathfrak{b}\}.$$

[11]) Das sind Funktionen, die gemäß unserer Interpretation nur die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

[12]) Vgl. die unter [1]) zitierten Arbeiten.

Eine *Menge offener Intervalle* mit rationalen Grenzen wird ausgedrückt durch einen Term $\mathfrak{d}$, für den die Formel $M_2(\mathfrak{d})$ gilt. Dabei soll das offene Intervall $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ dann und nur dann zu dieser Menge gehören, wenn $\mathfrak{d}(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ gilt. Dann haben wir für die Aussage „$\mathfrak{d}$ *ist eine Überdeckung des abgeschlossenen Intervalles* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$" die Formel

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (x)\{M(x) \to B(x \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \to (Ey)(Ez)\{\mathfrak{d}(y, z) \wedge x \in (y, z)\})\}.$$

Die Aussage „*Es gibt eine endliche Teilmenge von* $\mathfrak{d}$, *welche* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *überdeckt*" drücken wir aus durch

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv$$
$$(En)(x)\{M(x) \to B(x \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \to (Ey)(Ez)\{\mathfrak{d}(y, z) \wedge x \in (y, z) \wedge y \underset{\nu}{\leqq} n \wedge z \underset{\nu}{\leqq} n\})\}.$$

Als *Überdeckungssatz* nehmen wir die Formel

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \wedge B(M_2(\mathfrak{d})) \to B(\mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})).$$

Der Beweis nach klassischem Muster lautet: $\mathfrak{u}$ sei die untere Grenze aller rationalen Zahlen v, für die $\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, v, \mathfrak{b})$ gilt. Würde $\mathfrak{u}$ in $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ liegen, so folgte aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ die Existenz eines offenen Intervalles $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ mit $\mathfrak{d}(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ und $\mathfrak{u} \in (\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$. Dann gäbe es zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{u}$ eine rationale Zahl $\mathfrak{v}$, so daß auch noch $\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ gilt. Dies verstößt gegen die Minimaleigenschaft von $\mathfrak{u}$. Also kann $\mathfrak{u}$ nicht in $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ liegen. Da jedenfalls $\mathfrak{u} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{b}$ ist, folgt $\mathfrak{u} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{a}$, woraus sich schließlich $\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ergibt.

Die hier gebrauchte untere Grenze $\mathfrak{u}$ einer Gesamtheit rationaler Zahlen ist bei der vorliegenden Erklärung der reellen Zahlen durch den Term $\lambda_v \mathfrak{E}(\mathfrak{d}, v, \mathfrak{b})$ darzustellen. Diesen Term können wir jedoch nicht als Mengenterm nachweisen, da er den Ausdruck $M(x)$ enthält. Der klassische Beweis läßt sich daher mit den angegebenen Formeln nicht darstellen. Wir können aber diesen Beweis in seinen wesentlichen Zügen retten, indem wir — entsprechend wie dies nach LORENZEN in der verzweigten Analysis zu erfolgen hat — statt $\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ eine andere Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ verwenden, von der sich auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ schließen läßt.

Der in unserem System durchführbare Beweis verläuft folgendermaßen: Es sei

$$\begin{cases} \mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}) \equiv (Ey)(Ez)\{\mathfrak{d}(y, z) \wedge y < \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} < z \wedge y \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n} \wedge z \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n}\} \\ \wedge (y)(z)\{\mathfrak{d}(y, z) \wedge \mathfrak{a} < z \wedge z \leqq \mathfrak{b} \to (Eu)(Ev)\{\mathfrak{d}(u, v) \wedge u < z \wedge z < v \wedge u \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n} \wedge v \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n}\}\} \end{cases}$$
$$\mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (En)\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n).$$

Für den Term $\mathfrak{u} \equiv \lambda_v \mathfrak{F}(\mathfrak{d}, v, \mathfrak{b})$ ergeben sich die Formeln

$$M_2(\mathfrak{d}) \to M(\mathfrak{u})$$
$$M_2(\mathfrak{d}) \to B(\overline{(Ey)}(Ez)\{\mathfrak{d}(y, z) \wedge \mathfrak{u} \in (y, z)\}).$$

Hieraus folgt

$$M_2(\mathfrak{d}) \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to B(\overline{\mathfrak{u} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]}).$$

Mit den herleitbaren Formeln

$$M_2(\mathfrak{d}) \to B\left(\mathfrak{u} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \vee \mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \vee \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b})\right)$$

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \wedge M_2(\mathfrak{d}) \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to B\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b})\right)$$

erhält man

(1) $$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \wedge M_2(\mathfrak{d}) \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to B\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right).$$

Um nun von $B\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right)$ auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zu schließen, beweist man zunächst durch vollständige Induktion

$$\overline{M}_2(\mathfrak{d}) \vee \overline{M}(\mathfrak{r}) \vee B\left(\overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}) \vee \overline{\mathfrak{r} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} \vee (E\,y)(E\,z)\{\mathfrak{d}(y, z) \wedge \mathfrak{r} \in (y, z) \wedge y \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n} \wedge z \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n}\}\right).$$

Aus dieser Formel folgt

$$\overline{M}_2(\mathfrak{d}) \vee \overline{(E\,n)}\, B\left(\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n)\right) \vee \mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Ferner ergibt sich, da $\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n})$ unter der Voraussetzung $M_2(\mathfrak{d})$ ausgezeichnet ist,

$$\overline{M}_2(\mathfrak{d}) \vee B\left(\overline{B}((E\,n)\,\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n)) \vee (E\,n) B(\mathfrak{C}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n))\right).$$

Aus den letzten beiden Formeln und der herleitbaren Formel

(2) $$\overline{B}\left(M_2(\mathfrak{d})\right) \vee M_2(\mathfrak{d})$$

folgt

(3) $$B\left(M_2(\mathfrak{d})\right) \to B\left(B(\mathfrak{F}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right).$$

Die Formeln (1), (2), (3) liefern mit

$$\overline{\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}} \vee B(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b})$$

die Behauptung

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \wedge B\left(M_2(\mathfrak{d})\right) \to B\left(\mathfrak{D}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right).$$

Marburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 5. Juni 1954.)

KANOLD, H.-J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 180—185 (1954)

Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen.

Von
HANS-JOACHIM KANOLD.

Wir wollen in dieser Note mit großen deutschen Buchstaben Mengen von natürlichen Zahlen bezeichnen. Ist $\mathfrak{A}$ eine solche Menge und $A(x)$ die Anzahl der $a \in \mathfrak{A}$ mit $a \leq x$, so wird die obere asymptotische Dichte von $\mathfrak{A}$ gegeben durch

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)}{x}. \tag{1}$$

Existiert

$$D^*(\mathfrak{A}) = \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}, \tag{2}$$

so heißt dieser Grenzwert die natürliche Dichte von $\mathfrak{A}$. Wir sehen sofort, daß die Aussagen $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = 0$ und $D^*(\mathfrak{A}) = 0$ gleichwertig sind. Wir denken uns die Zerlegung einer natürlichen Zahl a in ein Primzahlpotenzprodukt stets geschrieben in der Gestalt

$$a = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}; \qquad p_1 < p_2 < \cdots < p_k. \tag{3}$$

Die Anzahl k der verschiedenen Primteiler von a wollen wir mit $V(a)$, den größten quadratischen Teiler von a mit $Q^2(a)$ bezeichnen, so daß

$$a = f(a)\, Q^2(a) \tag{4}$$

mit quadratfreiem $f(a)$ gilt.

Satz 1. *Es sei K eine beliebig vorgegebene, positive, reelle Zahl und $g(x)$ eine vorgegebene, für $x > K$ definierte Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften*[1]*:*

a) $g(x) > 0$ für $x > K$; b) $g(x)$ strebt monoton mit x gegen ∞. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$, $a > K$ sei bei der Zerlegung (4) die Ungleichung $Q^2(a) \geqq g(a)$ erfüllt. Dann ist $D^*(\mathfrak{A}) = 0$.

Beweis. Es sei N eine natürliche Zahl, die der Ungleichung

$$N > K \log N \tag{5}$$

[1]) Es ist klar, daß man für $g(x)$ eine *langsam* wachsende Funktion wählen wird, z. B. $g(x) = x^{\frac{1}{1000}}$ oder $g(x) = \log\log x$. Ist insbesondere $0 < K < 1$ und $g(x) = x$, so ist $\mathfrak{A}$ die Menge der Quadratzahlen; ist $g(x) > x$ für alle $x > K$, so enthält $\mathfrak{A}$ höchstens Elemente $a \leq K$.

genügt. Für alle $a \leq \frac{N}{\log N}$ ist in (4) trivialerweise

$$f(a) \leq \frac{N}{\log N}. \tag{6}$$

Für $K < \frac{N}{\log N} < a \leq N$ ist

$$f(a)\, g\left(\frac{N}{\log N}\right) \leq f(a)\, g(a) \leq f(a)\, Q^2(a) = a \leq N, \tag{7}$$

also

$$f(a) \leq \frac{N}{g\left(\frac{N}{\log N}\right)}. \tag{8}$$

Setzen wir

$$\max\left(\left[\frac{N}{\log N}\right], \left[\frac{N}{g\left(\frac{N}{\log N}\right)}\right]\right) = N', \tag{9}$$

so ist für alle $a \leq N$ die Ungleichung

$$f(a) \leq N' \tag{10}$$

gültig. Wir betrachten nun bei festgehaltenem $f(a) = f$ alle $a = f \cdot Q^2(a) \leq N$. Ihre Anzahl ist höchstens gleich $\left[\left(\frac{N}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$. Dann lassen wir f die natürlichen Zahlen $\leq N'$ durchlaufen und erhalten

$$\begin{aligned} A(N) &\leq \sum_{f=1}^{N'} \left[\left(\frac{N}{f}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \sqrt{N}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N'}}\right) \\ &< \sqrt{N} + \sqrt{N} \int_1^{N'} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{N} + 2\sqrt{NN'} - 2\sqrt{N} < 2\sqrt{NN'}. \end{aligned} \tag{11}$$

Damit wird

$$\frac{A(N)}{N} < 2\sqrt{\frac{N'}{N}}. \tag{12}$$

Beachten wir, daß nach (9)

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N'}{N} = 0 \tag{13}$$

gilt, so folgt also auch $\lim_{N \to \infty} \frac{A(N)}{N} = 0$ und somit die Richtigkeit von Satz 1.

Nach einem Ergebnis von G. H. Hardy und S. Ramanujan [1] ist bei jedem $\varepsilon > 0$ für $N - o(N)$ Zahlen der Menge $\mathfrak{N}$ aller natürlichen Zahlen $n \leq N$ immer

$$(1 - \varepsilon) \log\log N < V(n) < (1 + \varepsilon) \log\log N. \tag{14}$$

Damit und mit Hilfe des Beweises von Satz 1 gewinnen wir

Satz 2. *Es sei S eine vorgegebene natürliche Zahl, ferner sei ε so vorgegeben, daß $0 < \varepsilon < 1$ gilt. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ sei mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) $V(a) \leqq S$; *b) in der Zerlegung* (3) *ist für* $\varkappa > \varepsilon\, k = \varepsilon V(a)$ *mindestens ein* $\alpha_\varkappa$ *größer als* 1. *Dann ist* $D^*(\mathfrak{A}) = 0$.

Beweis. Angenommen, es wäre $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) > \varepsilon' > 0$. Wir wählen die natürlichen Zahlen S' und S'' so, daß die Ungleichungen

$$S' \geqq S; \quad \varepsilon\, S' \geqq S'' > \frac{4}{\varepsilon'} \tag{15}$$

erfüllt sind. Nun spalten wir $\mathfrak{A}$ in zwei Untermengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ auf, die wie folgt erklärt sind:

$$\begin{cases} \text{Für jedes} & a \in \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A} \quad \text{ist} \quad V(a) \leqq S'; \\ \text{Für jedes} & a \in \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A} \quad \text{ist} \quad V(a) > S'. \end{cases} \tag{16}$$

Dann ist

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}) \leqq \overline{D}^*(\mathfrak{A}_1) + \overline{D}^*(\mathfrak{A}_2). \tag{17}$$

Wählen wir jetzt die natürliche Zahl N so groß, daß die Ungleichung $S' < \frac{1}{2} \log\log N$ erfüllt ist, so ist nach dem oben erwähnten Ergebnis von HARDY und RAMANUJAN [s. (14)] sofort zu ersehen, daß

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}_1) = 0 \tag{18}$$

ist. Für jedes $a \in \mathfrak{A}_2$ ist nach der Voraussetzung b) des Satzes, sowie (15) und (16) wegen $\varkappa > \varepsilon V(a) > \varepsilon\, S' \geqq S''$ auch

$$a = f(a)\, Q^2(a) > f(a)\, p_{S''}^2 > f(a)\, S''^2 \tag{19}$$

gültig. Für alle $a \in \mathfrak{A}_2$, $a \leqq N$ ist daher

$$f(a) < \frac{N}{S''^2}. \tag{20}$$

Setzen wir

$$\left[\frac{N}{S''^2}\right] = N', \tag{21}$$

bezeichnen wir ferner mit $A_2(x)$ die Anzahl der $a \in \mathfrak{A}_2$ mit $a \leqq x$, so können wir wie im Beweis von Satz 1 für die Menge $\mathfrak{A}_2$ mit Hilfe von (15) die Abschätzung

$$\frac{A_2(N)}{N} < 2\sqrt{\frac{N'}{N}} \leqq \frac{2}{S''} < \frac{\varepsilon'}{2} \tag{22}$$

erhalten. Das ergibt $\overline{D}^*(\mathfrak{A}_2) < \frac{\varepsilon'}{2}$ und nach (17) und (18)

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}) < \frac{\varepsilon'}{2}, \tag{23}$$

was einen Widerspruch zu unserer Annahme am Anfang dieses Beweises darstellt. Also muß $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = 0$ sein. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3. *Für die Menge* $\mathfrak{V}$ *aller vollkommenen Zahlen ist* $D^*(\mathfrak{V}) = 0$.

Beweis. Bezeichnen wir die Summe der positiven Teiler einer natürlichen Zahl n, einschließlich 1 und n, mit $\sigma(n)$, so heißt n vollkommen, wenn

$$\sigma(n) = 2n \tag{24}$$

ist. Bekanntlich hat jede gerade vollkommene Zahl nur zwei verschiedene Primteiler. Jede ungerade vollkommene Zahl besitzt nach L. EULER [?] genau einen Primteiler in ungerader Potenz, die übrigen Primteiler in gerader Potenz. Nach Satz 2 ergibt sich somit unmittelbar die Richtigkeit von Satz 3.

Wir wollen zum Schluß Mengen $\mathfrak{M}$ betrachten, deren Elemente aus natürlichen Zahlen bestehen, die sich zu je zwei zu befreundeten Zahlenpaaren zusammenfassen lassen. Zwei Zahlen m_1, m_2 bilden bekanntlich ein befreundetes Zahlenpaar, wenn

$$m_1 + m_2 = \sigma(m_1) = \sigma(m_2) \tag{25}$$

gilt. Daraus erhalten wir

$$\frac{\sigma(m_1)}{m_1} = 1 + \frac{m_2}{m_1}. \tag{26}$$

Nehmen wir o.B.d.A. an, daß $m_1 \leq m_2$ ist, so muß m_1 eine nichtdefiziente Zahl sein, also

$$\frac{\sigma(m_1)}{m_1} \geq 2 \tag{27}$$

gelten. Das Gleichheitszeichen in (27) liefert $m_1 = m_2$, d.h. die vollkommenen Zahlen. Diese können wir wegen Satz 3 von unseren weiteren Betrachtungen ausschließen. Dann sind alle m_1 abundant. Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält gewisse abundante Zahlen m_1, deren Gesamtheit die Untermenge $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ bildet, und gewisse defiziente Zahlen m_2, deren Gesamtheit die Untermenge $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ bildet. Wenn wir $\overline{D}^*(\mathfrak{M})$ nach oben abschätzen wollen, so sehen wir, daß

$$\overline{D}^*(\mathfrak{M}) \leq \overline{D}^*(\mathfrak{M}_1) + \overline{D}^*(\mathfrak{M}_2) \leq 2\overline{D}^*(\mathfrak{M}_1) \tag{28}$$

sein muß. Als einfache Folgerung aus Satz 2 ergibt sich nun

Hilfssatz 1. *Es sei h eine vorgegebene natürliche Zahl. $\mathfrak{M}$ sei die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren m_1, m_2 besteht, für die die Bedingung $m_1 + m_2 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$ erfüllt ist. Dann ist $D^*(\mathfrak{M}) = 0$.*

Beweis. Nach (25) bedeutet $\sigma(m_1) = m_1 + m_2 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$, daß m_1 weniger als h verschiedene ungerade Primzahlen in ungerader Potenz enthält. Setzen wir $2h = S$, so sehen wir, daß $\mathfrak{M}_1$ die Voraussetzungen von Satz 2 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ erfüllt. Damit ergibt sich die Richtigkeit von Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren m_1, m_2 besteht, bei denen 2 in m_1 nicht in der gleichen Potenz wie in m_2 enthalten ist. Dann ist $D^*(\mathfrak{M}) = 0$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $\overline{D}^*(\mathfrak{M}) > \varepsilon > 0$. Wir wählen in Hilfssatz 1 die natürliche Zahl h so, daß

$$2^{h-2} > \frac{1}{\varepsilon} \tag{29}$$

ist. Aus $m_1 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$ folgt auch $m_1 + m_2 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$. Nach Hilfssatz 1 können wir also für den weiteren Beweis $m_1 \equiv 0 \pmod{2^h}$ annehmen. Beachten

wir, daß die Menge aller Vielfachen von 2^h die asymptotische Dichte $\frac{1}{2^h}$ besitzt, so erhalten wir nach (28) und (29)

$$\overline{D}^*(\mathfrak{M}) \leq 2 \cdot \frac{1}{2^h} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{30}$$

entgegen unserer Annahme.

Hilfssatz 3. *Es sei* $v = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1} p_i$ *eine gerade vollkommene Zahl. Ferner sei* $m_1 \equiv 0 \pmod{v}$; $m_2 \equiv 0 \pmod{2^{p-1}}$. m_1, m_2 *sei ein befreundetes Zahlenpaar. Dann ist* $m_1 = m_2 = v$.

Beweis. Wir nehmen für m_1 und m_2 die folgenden Primzahlpotenzzerlegungen an:

$$m_1 = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}; \quad 2 < p_2 < \dots < p_k; \quad \alpha_1 \geq p - 1; \quad p_i = 2^p - 1, \tag{31}$$

wobei i eine der Zahlen $2, \dots, k$ bedeutet;

$$m_2 = 2^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}; \quad 2 < q_2 < \dots < q_l; \quad \beta_1 \geq p - 1. \tag{32}$$

Ist wenigstens eine der beiden Zahlen α_1, β_1 gleich $p - 1$, so folgt aus (25), daß

$$m_1 + m_2 \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \text{d.h.} \quad m_1 \equiv m_2 \equiv 0 \pmod{v} \tag{33}$$

sein muß. Damit ergibt sich aber $\frac{\sigma(m_j)}{m_j} \geq 2$ für $j = 1, 2$ und nach (25) auch $m_1 = m_2 = v$. Ist jede der beiden Zahlen α_1, β_1 größer als $p - 1$, so folgt

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\sigma(m_1)}{m_1} \geq \dfrac{2^{p+1} - 1}{2^p} \cdot \dfrac{p_i + 1}{p_i} = 1 + \dfrac{2^p}{2^p - 1}; \\ 1 + \dfrac{2^p - 1}{2^p} = \dfrac{\sigma(2^p)}{2^p} \leq \dfrac{\sigma(m_2)}{m_2} = 1 + \dfrac{m_1}{m_2} \leq 1 + \dfrac{2^p - 1}{2^p}. \end{cases} \tag{34}$$

Dann müßte aber $m_1 \geq 2^p p_2$, $p_2 = 2^p - 1$ und $m_2 = 2^p$ sein, was nach (25) sofort zum Widerspruch führt.

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren* m_1, m_2 *besteht. Dann ist* $\overline{D}^*(\mathfrak{M}) < 0{,}204$.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 brauchen wir nur diejenigen m_1, m_2 zu betrachten, die den Bedingungen

$$m_1 = 2^\alpha P; \quad m_2 = 2^\alpha Q; \quad \alpha \geq 0; \quad P Q \equiv 1 \pmod{2} \tag{35}$$

genügen. Daraus folgt

$$\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1} - 1} < \frac{\sigma(P)}{P} < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}, \tag{36}$$

wobei für $\alpha = 0$ die obere Schranke durch ∞ ersetzt wird. Weiterhin können wir nach Hilfssatz 3 aus der Untermenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ alle Vielfachen von geraden vollkommenen Zahlen entfernen, ohne unsere Abschätzung zu beeinflussen. Das bedeutet, daß wir z.B. aus $\mathfrak{M}_1$ alle Zahlen weglassen können,

die durch wenigstens eine der folgenden zehn Zahlen teilbar sind:

$$(37) \qquad 2 \cdot 3{,}2^2 \cdot 7{,}2^3 \cdot 5{,}2^4 \cdot 11{,}2^4 \cdot 13{,}2^5 \cdot 17{,}2^5 \cdot 19{,}2^5 \cdot 23{,}2^5 \cdot 29{,}2^4 \cdot 31 .$$

Denn für diese Zahlen ist offensichtlich (36) nicht erfüllt. Die natürliche Dichte der Menge aller Vielfachen dieser zehn Zahlen existiert und ist größer als 0,212. Alle diese Zahlen sind nichtdefizient. Da nach einem bekannten Ergebnis von Herrn F. Behrend [3] die obere asymptotische Dichte der Menge aller nichtdefizienten Zahlen kleiner als 0,314 ist, ergibt sich nach (28) sogleich

$$(38) \qquad \overline{D}^*(\mathfrak{M}) < 2(0{,}314 - 0{,}212) = 0{,}204.$$

Damit ist der Beweis von Satz 4 beendet.

Literatur.

[1] Ramanujan, S.: Collected papers, 262—275. Cambridge 1927. Vgl. auch P. Turán, On a theorem of Hardy and Ramanujan. J. London Math. Soc. **9**, 274—276 (1934). — [2] Euler, L.: Opera postuma, Bd. I, S. 14—15. — [3] Behrend, F.: Über numeri abundantes. I, II. Sitzgsber. Akad. Berlin **1932**, 322—328; **1933**, 280—293.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 15. Juli 1954.)

Bagemihl, F., and W. Seidel
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 186—199 (1954)

Some boundary properties of analytic functions.

By
F. Bagemihl and W. Seidel.

§ 1. This paper deals with limits and cluster sets[1]) (Häufungsmengen) of analytic and meromorphic functions in $|z|<R\leq+\infty$ along certain paths and families of paths of a fairly general character. In § 2 we define these families of paths, which we call *tresses*, and give examples thereof to indicate the variety of paths admitted by this definition. In § 3 we show, among other things, the identity between the cluster sets and, in particular, the limits of arbitrary complex-valued continuous functions and those of analytic functions along tresses in $|z|<R$. This generalizes results due to A. Roth[2]), and the proof is facilitated by Mergelyan's recent theorem on polynomial approximation. Of the other results in § 3 we mention here the example of an analytic function in $|z|<1$ which, on almost every radius, tends to a prescribed fixed limit in a prescribed fixed direction. The existence or non-existence of radial limits of analytic functions under various conditions is discussed in § 4. In § 5 we show that there exists an analytic function in $|z|<1$ whose cluster set on almost every radius is a given continuum in the extended complex plane, and this is generalized in several directions. The next section deals with the characterization of the function representing the limit values of an analytic function on a tress, and generalizes some theorems proved by A. Roth. In the final section, we establish the identity between analytic point sets in the extended complex plane and the set of limit values of an analytic function along certain families of paths, and we conclude with a generalization of a well-known example concerning asymptotic values of an entire function given by W. Gross.

§ 2. Throughout this paper, let $0<R\leq+\infty$. By a *monotonic boundary path*, abbreviated *mb-path*, in $|z|<R$, we shall mean a simple continuous curve, $z=z(\mu)$ $(0\leq\mu<1)$, in $|z|<R$, with $z(0)=0$, such that, as $\mu\to1$, $|z(\mu)|\to R$ (strictly) monotonically.

If $0<r<R$, we shall denote by C_r the circle $|z|=r$, and by D_r the disk $|z|\leq r$.

Definition 1. In a complex τ-plane, let E be a non-empty set of points on the circle $|\tau|=1$. To every $\tau\in E$, let there correspond an mb-path t_τ in

[1]) Let $f(z)$ be a complex-valued function in $|z|<R\leq+\infty$, and let S be a subset of $|z|<R$. The *cluster set of* $f(z)$ *on* S is the set of all points w in the extended complex plane with the property that there exists a sequence $\{z_\nu\}$ of points in S, with $\lim_{\nu\to\infty}|z_\nu|=R$, such that $\lim_{\nu\to\infty}f(z_\nu)=w$.

[2]) Roth, Alice: *Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen.* Commentarii Mathematici Helvetici **11**, 77—125 (1938).

$|z|<R$, such that the intersection of every pair of these mb-paths is the origin, and, for every r such that $0<r<R$, the one-to-one correspondence $\tau \leftrightarrow t_\tau \cap C_r$ $(\tau \in E)$ preserves cyclic order. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ will be called a *tress in* $|z|<R$ *relative to* E, provided that the following conditions are satisfied:

(i) E is an F_σ of first category relative to $|\tau|=1$.

(ii) There exists a decomposition of E,

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{1}$$

where each E_n is closed and nowhere dense relative to $|\tau|=1$, such that, if $T_n=\bigcup_{\tau \in E_n} t_\tau$, then $T_n \cap D_r$ is closed and nowhere dense $(n=1, 2, 3, \ldots;$ $0<r<R)$.

The following examples indicate to some extent the variety of families of mb-paths that form tresses.

Example 1. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that $0 \leqq r<R$ and $\vartheta=\varphi$. Then the set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ of radii[3]) is a tress in $|z|<R$, relative to E.

Example 2. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, where $0 \leqq \varphi<2\pi$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that $0 \leqq r<R$ and, for R finite, $\vartheta=\varphi+\frac{1}{R-r}$, whereas for $R=+\infty$, $\vartheta=\varphi+r$. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ of spirals is a tress in $|z|<R$, relative to E.

In each of the first two examples, the mb-paths constituting the tress are all congruent to one another. In each of the following two examples, no two of the mb-paths of the tress are congruent.

Example 3. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$, $|\arg \tau| \leq \frac{1}{R}$ if R is finite, $|\arg \tau| \leq 1$ if $R=+\infty$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that, for R finite, $\vartheta=\sin\frac{1}{R-r}+\varphi\cdot(R-r)$, whereas for $R=+\infty$, $\vartheta=\sin r+\frac{\varphi}{1+r}$. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ is a tress in $|z|<R$, relative to E. In case R is finite, all the mb-paths of the tress have one and the same arc of $|z|=R$ as end.

Example 4. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$, $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{2}$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that, for $\varphi \neq 0$, $r=\frac{\sin(\varphi-\vartheta)}{\sin\varphi}$, $0 \leqq r<1$, $|\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$, and $\operatorname{sgn}\vartheta=\operatorname{sgn}\varphi$, whereas for $\varphi=0$, $0 \leqq r<1$ and $\vartheta=0$. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ of circular arcs through the origin and the point $z=1$ is a tress in $|z|<R$, relative to E.

§ 3. Theorem 1[4]). *Let there be given a continuous complex-valued function* $g(z)$ *in* $|z|<R$, *and a tress* $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$, *relative to* E, *in* $|z|<R$. *Then*

[3]) In case $R=+\infty$, these are rays, not radii. We shall, nevertheless, refer to them in the sequel as radii, for the sake of brevity.

[4]) This theorem generalizes results obtained by A. Roth, *loc. cit.*, Theorems II and II'.

there exists a function $f(z)$, regular in $|z|<R$, such that, on every mb-path of $\mathcal{T}$, the cluster set of $f(z)$, $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ coincides with that of $g(z)$, $\Re g(z)$, $\Im g(z)$, respectively.

Proof. We shall retain the notation used in defining tress. Let

$$0<r_0<r_1<\cdots<r_n<\cdots<R,$$

where $\lim_{n\to\infty} r_n=R$, and set $F_0=D_{r_0}\cup(T_1\cap C_{r_1})$,

$$F_n=D_{r_n}\cup\Big[\Big(\bigcup_{j=1}^{n}T_j\Big)\cap(D_{r_{n+1}}-D_{r_n})\Big]\cup(T_{n+1}\cap C_{r_{n+1}}),\qquad(n=1,2,3,\ldots).$$

It follows from the definition of $\mathcal{T}$, that each F_n is a bounded closed set whose complement is connected.

We now define, by induction on n, two real-valued functions, $\varphi_n(z)$ and $\psi_n(z)$, on F_n, and a polynomial $p_n(z)$, as follows.

Put

$$\varphi_0(z)=\psi_0(z)=0,\qquad z\in D_{r_0}$$
$$\varphi_0(z)=\Re g(z),\quad \psi_0(z)=\Im g(z),\qquad z\in T_1\cap C_{r_1}.$$

The function $\varphi_0(z)+i\,\psi_0(z)$ is obviously continuous on F_0 and regular at all interior points of F_0. Consequently, according to MERGELYAN's theorem[5]), there exists a polynomial $p_0(z)$ such that

$$|p_0(z)-[\varphi_0(z)+i\,\psi_0(z)]|\leq 1,\qquad z\in F_0.$$

Suppose, now, that $n>0$, and that we have defined the functions $\varphi_{n-1}(z)$ and $\psi_{n-1}(z)$ on F_{n-1}, and the polynomials $p_0(z), p_1(z), \ldots, p_{n-1}(z)$, so that

$$\varphi_{n-1}(z)=\Re g(z),\quad \psi_{n-1}(z)=\Im g(z),\qquad z\in F_{n-1}\cap C_{r_n},$$

and

$$(2)\qquad |p_0(z)+p_1(z)+\cdots+p_{n-1}(z)-g(z)|\leq\frac{1}{2^{n-1}},\qquad z\in F_{n-1}\cap C_{r_n}.$$

By applying TIETZE's theorem[6]) and making use of (2), it is easy to show that there exist real-valued functions $\xi_n(z)$ and $\eta_n(z)$, continuous in $|z|<R$, such that

$$\xi_n(z)=\Re\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\quad \eta_n(z)=\Im\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\qquad z\in F_{n-1}\cap C_{r_n};$$
$$\xi_n(z)=\Re g(z),\qquad \eta_n(z)=\Im g(z),\qquad z\in F_n\cap C_{r_{n+1}};$$

$$(3)\quad |\xi_n(z)-\Re g(z)|\leq\frac{1}{2^{n-1}},\ |\eta_n(z)-\Im g(z)|\leq\frac{1}{2^{n-1}},\ z\in\bigcup_{j=1}^{n}T_j,\ r_n<|z|<r_{n+1}.$$

We now set

$$(4)\qquad \varphi_n(z)=\Re\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\quad \psi_n(z)=\Im\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\quad z\in D_{r_n},$$

$$(5)\qquad \varphi_n(z)=\xi_n(z),\qquad \psi_n(z)=\eta_n(z),\qquad z\in F_n\cap(D_{r_{n+1}}-D_{r_n}).$$

[5]) MERGELYAN, S. N.: *On the representation of functions by series of polynomials on closed sets* (in Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S. **78**, 405—408 (1951). Amer. Math. Soc. Transl. No. 85, Providence, 1953.

[6]) See, *e.g.*, KURATOWSKI, C.: *Topologie I*, 2d ed., Warszawa-Wrocław, 1948, p. 117.

The function $\varphi_n(z)+i\,\psi_n(z)$ is clearly continuous on F_n and regular at all interior points of F_n. Again by MERGELYAN's theorem there exists a polynomial $p_n(z)$ such that

$$(6)\qquad |p_0(z)+p_1(z)+\cdots+p_n(z)-[\varphi_n(z)+i\,\psi_n(z)]|\leq\frac{1}{2^n},\qquad z\in F_n.$$

This completes the induction.

Let $f(z)=p_0(z)+p_1(z)+\cdots+p_n(z)+\cdots$ for $|z|<R$. If $z\in D_{r_n}$, it follows from (4) and (6) that

$$(7)\qquad |p_{n+j}(z)|\leq\frac{1}{2^{n+j}},\qquad (j=0,1,2,\ldots).$$

Hence, $f(z)$ is regular in $|z|<R$.

Let τ be an arbitrary, fixed element of E. We are going to show that

$$(8)\qquad \lim_{\substack{|z|\to R\\ z\in l_\tau}}\left(\Re f(z)-\Re g(z)\right)=0.$$

According to (ii), there exists an m such that $\tau\in E_m$. Assume that $k\geq 0$, $z\in t_\tau$, and $r_{m-k}\leq|z|<r_{m-k-1}$. Then, by the definition of $f(z)$, we have

$$(9)\qquad |\Re f(z)-\Re g(z)|\leq\gamma_k+\delta_k+\varrho_k,$$

where

$$\gamma_k=\left|\sum_{j=0}^{m+k}\Re p_j(z)-\varphi_{m+k}(z)\right|,$$

$$\delta_k=|\varphi_{m+k}(z)-\Re g(z)|,$$

and

$$\varrho_k=\sum_{j=m+k+1}^{\infty}|\Re p_j(z)|.$$

Applying (6), with $n=m+k$, we obtain

$$(10)\qquad \gamma_k\leq\frac{1}{2^{m+k}}.$$

Making use of (5), (3), and (2), with $n=m+k$, we see that

$$(11)\qquad \delta_k\leq\frac{1}{2^{m+k-1}}.$$

Finally, (7), with $n=m+k+1$, yields

$$(12)\qquad \varrho_k\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+k+1+j}}.$$

Combining (9), (10), (11), and (12), we get

$$(13)\qquad |\Re f(z)-\Re g(z)|\leq\sum_{j=m+k-1}^{\infty}\frac{1}{2^j},$$

which implies (8).

An analogous argument shows that, for every $\tau \in E$,

$$\lim_{\substack{|z|\to R \\ z\in t_\tau}} \left(\Im f(z) - \Im g(z)\right) = 0, \tag{14}$$

and (8) and (14) yield the relation

$$\lim_{\substack{|z|\to R \\ z\in t_\tau}} \left(f(z) - g(z)\right) = 0. \tag{15}$$

The conclusion of the theorem is an immediate consequence of (8), (14), and (15).

Corollary 1. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a tress, relative to E, in $|z| < R$, and let there be given a continuous complex-valued function $g(z)$ in $|z| < R$ such that, for every $\tau \in E$, as $|z| \to R$, with $z \in t_\tau$, we have $\Re g(z) \to \alpha(\tau)$ and $\Im g(z) \to \beta(\tau)$, where $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are real, single-valued functions of $\tau \in E$, which may assume the values $\pm\infty$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for every $\tau \in E$, as $|z| \to R$, with $z \in t_\tau$, we have $\Re f(z) \to \alpha(\tau)$ and $\Im f(z) \to \beta(\tau)$.*

Corollary 2. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a tress in $|z| < R$, relative to a closed, nowhere dense set E, with the property*[7]) *that it is possible to take each E_n in (1) to be identical with E. Let α and β be real constants (possibly $\pm\infty$). Then there exists an $f(z)$, regular and not constant in $|z| < R$, such that*

$$\lim_{\substack{|z|\to R \\ z\in t_\tau}} \Re f(z) = \alpha \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{|z|\to R \\ z\in t_\tau}} \Im f(z) = \beta$$

uniformly *for $\tau \in E$.*

Proof. It follows from (ii) and the fact that E is closed and nowhere dense, that it is possible to add an mb-path t' to $\mathcal{T}$ [for the purpose of ensuring that the function $f(z)$ finally arrived at is not identically constant] so as to obtain a tress $\mathcal{T}'$ having the properties assumed for $\mathcal{T}$. Let $\alpha' \neq \alpha$. Take $g(z)$ to be any continuous, complex-valued function in $|z| < R$ such that

$$\Re g(z) \to \alpha \quad \text{and} \quad \Im g(z) \to \beta \quad \text{uniformly on } \bigcup_{\tau\in E} t_\tau \quad \text{as} \quad |z| \to R, \tag{16}$$

and

$$\lim_{\substack{|z|\to R \\ z\in t'}} \Re g(z) = \alpha'.$$

Corollary 2 now follows from Corollary 1 if we note (16) and the fact that in the proof of Theorem 1, since now all the sets E_n are identical with E, (13) holds for a fixed m independent of the mb-path in $\mathcal{T}$.

Remark 1. As an application of Corollary 2, take E in Example 2 to be a perfect, nowhere dense set. Then[8]), *given a complex constant c, finite or*

[7]) The tresses in Examples 1 to 4, if E there is taken to be closed and nowhere dense, possess this property.

[8]) *Cf.* BAGEMIHL, F., P. ERDÖS and W. SEIDEL: *Sur quelques proprietés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle-unité.* Ann. sci. École norm. sup. (3) **70**, 135—147 (1953), p. 139, Theorem 4. BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: *Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analytic and meromorphic functions.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 1251—1258 (1953), p. 1251, Theorem 1.

infinite, there exists an $f(z)$, regular and not constant in $|z|<R$, such that, along the $2^{\aleph_0}$ prescribed spiral mb-paths in $|z|<R$ constituting the tress corresponding to E, $f(z)\to c$ uniformly as $|z|\to R$.

In Example 1, let $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, where P_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ is a perfect, nowhere dense set, of measure $2\pi-\frac{1}{n}$, so that E is an F_σ of first category and measure 2π. Applying Corollary 1 to the resulting tress $\mathcal{T}$, with $g(z)=\frac{i}{R-|z|}$ if R is finite, $g(z)=i|z|$ if $R=+\infty$, in $|z|<R$, we obtain

Corollary 3[9]. *There exists a function $f(z)$, regular in $|z|<R$, such that, for almost all ϑ in the interval $0\leqq\vartheta<2\pi$, $\Re f(re^{i\vartheta})\to 0$ and $\Im f(re^{i\vartheta})\to+\infty$ as $r\to R$.*

In other words, for almost all ϑ in the interval $0\leqq\vartheta<2\pi$, $f(re^{i\vartheta})$ tends to ∞ *in the direction of the axis of imaginaries* as $r\to R$. This can be generalized as follows:

Corollary 4. *Let ω be any complex number in the extended complex plane, and let there be given an arbitrary fixed direction. Then there exists a non-constant $F(z)$, regular in $|z|<R$, such that, for almost all ϑ in the interval $0\leqq\vartheta<2\pi$, $F(re^{i\vartheta})$ tends to ω in the prescribed direction as $r\to R$.*

Proof. If $\omega=\infty$, then $F(z)$ can evidently be obtained from the function $f(z)$ in Corollary 3 by multiplying $f(z)$ by a suitable constant of modulus 1.

Suppose that ω is finite. It clearly suffices to assume that $\omega=0$ and that the given direction is opposite to that of the axis of reals. Let $f(z)$ be the function in Corollary 3, and form $F(z)=e^{if(z)}$. Then $\frac{\Im F(z)}{\Re F(z)}=\tan\Re f(z)$, which tends to 0 along almost all radii, whereas $\Re F(z)\to 0$ through positive values along almost all radii. This completes the proof.

If we set $G(z)=e^{f(z)}$ in $|z|<R$, where $f(z)$ is a function satisfying Corollary 3, this corollary yields

Corollary 5[10]. *There exists a $G(z)$, regular in $|z|<R$, such that the cluster set of $G(z)$ on almost every radius of $|z|<R$ is the unit circle $|w|=1$. Consequently*[11], *on almost every radius in $|z|<R$, $G(z)$ is bounded but possesses no limit as $|z|\to R$.*

§ 4. On the other hand, conditions under which the existence of radial limits can be inferred are given by

Theorem 2. *Let A be an arc of $|z|=1$, B be a subset of A, $\mathcal{R}$ be the set of radii in $|z|<1$ terminating in the points of B, and $f(z)$ be a meromorphic function in $|z|<1$, whose cluster set on every radius belonging to $\mathcal{R}$ is not the whole complex plane. If B is of second category relative to A, then there exists*

[9]) This answers a question raised by P. Erdös (written communication). Corollaries 3 and 4 sharpen and generalize examples due to Lusin. *Cf.* Lusin, N., and J. Priwaloff: *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*. Ann. sci. Écolé norm. sup. (3) **42**, 143—191 (1925), pp. 183—185.

[10]) This result is generalized below in Corollary 6.

[11]) This answers a question raised by W. Rudin (oral communication).

a subarc of A, almost every point of which is a FATOU *point*[12]) *of $f(z)$. If B is a residual set relative to A, then the set of* FATOU *points of $f(z)$ is of positive measure on every subarc of A.*

Proof. Suppose that there exists no subarc of A, almost every point of which is a FATOU point of $f(z)$. Then the complement of the set of FATOU points of $f(z)$ is of positive measure on every subarc of A. Hence[13]), there exists a residual subset, C, of A, such that the cluster set of $f(z)$ on every radius terminating in a point of C is the whole complex plane. If B is of second category, then[14]) $B \cap C \neq 0$, contrary to hypothesis. This proves the first part of the conclusion of the theorem, and the second part now follows from the fact that if B is residual, then[15]) B is of second category on every subarc of A.

It is well known that a function $f(z)$, regular in $|z|<1$, which is uniformly bounded on a set of radii of measure 2π, necessarily possesses radial limits. The next theorem shows, however, that for any ε with $0<\varepsilon\leqq 2\pi$, there exists a regular function in $|z|<1$ which is uniformly bounded on a set of radii of measure $2\pi-\varepsilon$ and yet has no limit as $|z|\to 1$ along any radius of $|z|<1$. In this connection, the following result due to K. MEIER[16]) is of interest: If $f(z)$ is regular in $|z|<1$, and for every point ζ of an arbitrary set N on $|z|=1$ there exist *two* chords in $|z|<1$ terminating in ζ on which $f(z)$ is bounded, then at almost all points of N, $f(z)$ has a finite angular limit.

Theorem 3. *A necessary and sufficient condition on a non-empty set M of radii of $|z|<1$, that there exist a function $f(z)$, regular in $|z|<1$, which is uniformly bounded on the radii belonging to M and yet has no limit on any radius of $|z|<1$, is that M be nowhere dense.*

Proof. The condition is necessary. For suppose that M is not nowhere dense. Then M is dense in some sector of $|z|<1$, so that, if $f(z)$ is uniformly bounded on M, it must be bounded in this sector, and hence, by a well-known extension of FATOU's theorem, $f(z)$ has radial limits.

The condition is sufficient. For let M be a non-empty, nowhere dense set of radii in $|z|<1$, and let $\overline{M}$ be the closure of M relative to $|z|<1$. Then $\overline{M}$ is a closed, nowhere dense set of radii, relative to $|z|<1$. For every natural

[12]) For a definition of this term, see, *e.g.*, BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: *A general principle involving Baire category, with applications to function theory and other fields.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 1068—1075 (1953), p. 1074, footnote 10. The result referred to in footnote 12 of this paper as having been communicated by M. OHTSUKA is due to E. F. COLLINGWOOD, who informs us that he is publishing it, along with other related results.

[13]) *Ibid.*, p. 1071, Theorem 7(c).

[14]) See, *e.g.*, HAHN, H.: *Reelle Funktionen (Punktfunktionen)*, p. 134. Leipzig 1932.

[15]) *Ibid.*, p. 136.

[16]) MEIER, K.: *Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen.* Commentarii Mathematici Helvetici **24**, 238—259 (1950), p. 241. We are indebted to E. F. COLLINGWOOD for calling our attention to this paper. A remark of MEIER's on p. 241 is Theorem 9, for G equal to the whole plane, of a paper of the present authors', *loc. cit.*[12]), p. 1072.

number n, let $r_n = 1 - \frac{1}{n}$. The complement of the set $\overline{M} \cap C_{r_n}$ relative to C_{r_n} consists of a finite or an enumerable number of mutually exclusive open arcs. In each of these open arcs that is of length greater than $\frac{1}{n}$ —call its length λ—, take a closed subarc of length $\lambda - \frac{1}{n}$, and denote the union of these finitely many closed subarcs by A_n. Let $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ be a sequence of numbers dense in the complex plane. Take $h(z)$ to be a continuous function on $\overline{M} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ such that $\Re h(z) = 0$ on $\overline{M}$, $\Im h(z) \to +\infty$ as $|z| \to 1$ on every radius belonging to $\overline{M}$, and $h(z) = \varrho_n$ on A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; this is clearly possible since each A_n is a positive distance away from $\overline{M}$. The set $\overline{M} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ is closed relative to $|z| < 1$, and every radius of $|z| < 1$ that is not in $\overline{M}$ intersects all but a finite number of the sets A_n. A simple modification of the proof of Theorem 1 now yields a regular function $F(z)$ such that $\Re F(z) \to 0$ uniformly and $\Im F(z) \to +\infty$ as $|z| \to 1$ with $z \in \overline{M}$, and the cluster set of $F(z)$ on every radius of $|z| < 1$ that does not belong to $\overline{M}$ is the whole plane. The function $f(z) = e^{F(z)}$ has the required properties.

Remark 2. Theorem 3 obviously holds if the word "regular" therein is replaced by "meromorphic".

Remark 3. As the proof of the sufficiency part of the theorem shows, the function $f(z)$ that was obtained not only has no limit on any radius of $|z| < 1$, but its cluster set on every radius of $|z| < 1$ that does not belong to $\overline{M}$ is the whole plane.

Remark 4. The sufficiency part of the theorem, with obvious trivial modifications, is valid for entire functions.

Remark 5. On the other hand, the necessity part of the theorem cannot be extended to an entire function. Indeed, VALIRON[17]) has proved the existence of entire functions $f(z)$ which are bounded in a sector but do not approach a limit as $z \to \infty$ along any path in the sector.

§ 5. It is easy to show that the cluster set of an $f(z)$, regular in $|z| < R$, on an mb-path in $|z| < R$, is a continuum in the extended complex plane. The following theorem shows that the converse, for an arbitrary continuum, is also true.

Theorem 4[18]). *Let K be an arbitrary continuum in the extended complex plane, and t be an arbitrary mb-path in $|z| < R$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, whose cluster set on t is K.*

[17]) VALIRON, G.: *Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia.* J. Math. pures appl. (9) **7**, 113—136 (1928), p. 130. *Cf.* also GONTCHAROFF, W.: *Sur les valeurs des fonctions analytiques dans un angle.* Communications de la Société Mathématique de Kharkow (4) **4**, 129—135 (1930).

[18]) For a related theorem, see GROSS, W.: *Über die Singularitäten analytischer Funktionen.* Mh. Math. Phys. **29**, 3—47 (1918), p. 20. *Cf.* also WEIGAND, L.: *Über die Randwerte meromorpher Funktionen einer Veränderlichen.* Commentarii Mathematici Helvetici **22**, 125—149 (1949), p. 127.

Proof. We shall first define a continuous function $h(z)$ on t, whose cluster set on t is K. If K consists of the point at infinity, let $h(z)$ be a finite continuous function on t, which tends to ∞ as $|z| \to R$. Otherwise, let w_0 be a fixed finite point of K. Let $0 < r_1 < \cdots < r_n < \cdots < R$, where $\lim_{n\to\infty} r_n = R$, and set $A_n = t \cap (\overline{D_{r_{n+1}} - D_{r_n}})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. There exists[19]) a sequence of locally connected continua $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ such that $L_n \geqq L_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ and $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$. According to the HAHN-MAZURKIEWICZ theorem[20]) there exists a continuous function $h_n(z)$ (which may assume the value ∞) defined on A_n, which maps A_n onto L_n and whose values at both end points of A_n are w_0 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Let m be the integer such that $m < |w_0| \leq m + 1$. For every natural number n, define a continuous function $h_n^*(z)$ on A_n so that, if $|h_n(z)| \leq m + n$, then $h_n^*(z) = h_n(z)$, but if $|h_n(z)| > m + n$, then $|h_n^*(z)| = m + n$ (see, *e.g.*, KURATOWSKI, *loc. cit.*[19]), p. 271, VI, 2). Define $h(z)$ on t so as to be identical with $h_n^*(z)$ on A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Then $h(z)$ is evidently finite, single-valued, and continuous on t, and the cluster set of $h(z)$ on t is K.

Since t is closed relative to $|z| < R$, by TIETZE's theorem $h(z)$ can be extended to a finite continuous function $g(z)$ in $|z| < R$. Applying Theorem 1, we obtain a function satisfying the conclusion of Theorem 4[21]).

A generalization of Theorem 4 is given by

Theorem 5. *Let $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ be an enumerable number of mb-paths in $|z| < R$, the intersection of every pair of which is the origin, and let $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ be a sequence of arbitrary continua in the extended complex plane. Then there exists a function $f(z)$, regular and not constant in $|z| < R$, such that, for every n, the cluster set of $f(z)$ on t_n is K_n.*

Proof. According to the proof of Theorem 4, for every n there exists a continuous function $g_n(z)$ on t_n, whose cluster set on t_n is K_n. [If all the sets K_n consist of one and the same point c, then in order to ensure that the function $f(z)$ finally obtained is not identically equal to c, let t_0 be an mb-path in $|z| < R$, having only the origin in common with any one of the mb-paths t_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and define $g_0(z)$ on t_0 to be identically equal to some finite constant $c' \neq c$.] Retaining the notation of the proof of Theorem 4, for every n let $s_n = \overline{t_n - D_{r_{n+1}}}$, where the closure is taken relative to $|z| < R$. Then $S = \bigcup s_n$ is closed relative to $|z| < R$, and the function $g^*(z)$ defined on S so as to be identical with $g_n(z)$ on s_n, for every n, is evidently continuous on S. The proof can now be completed by an argument analogous to that in the last paragraph of the proof of Theorem 4.

Remark 6. In case every K_n is a single (finite or infinite) point, Theorem 5 reduces to an earlier result proved by the authors[22]).

[19]) See KURATOWSKI, C.: *Topologie II*. Warszawa-Wrocław, 1950, p. 188.

[20]) *Cf.* HAHN, H.: *loc. cit.*, p. 165.

[21]) A much weaker theorem of approximation than MERGELYAN's would suffice in the present case.

[22]) BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: *loc. cit.*[8]), p. 1251, Theorem 1 for the case $\lambda = \nu = 1$.

The preceding theorem can be extended in a measure- theoretic direction for certain families of mb-paths (*cf.* Remark 8). For the sake of simplicity we shall confine ourselves to radii and prove

Theorem 6. *Let* M_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *be enumerably many mutually exclusive measurable subsets of the interval* $0 \leqq \vartheta < 2\pi$, *of respective positive measures* m_n, *and let* K_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *be arbitrary continua in the extended complex plane. Then there exists a function* $f(z)$, *regular and not constant in* $|z|<R$, *such that, for every* n, *for almost all* ϑ *in* M_n, *the cluster set of* $f(z)$ *on the radius* $\arg z = \vartheta$ $(|z|<R)$ *is* K_n.

Proof. Suppose, first, that not all the sets K_n consist of one and the same point. According to LUSIN's theorem[23]), for every n, there exist perfect, nowhere dense subsets $P_{n,j}$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ of M_n, such that $P_{n,j} \subseteqq P_{n,j+1}$ and $\lim_{j\to\infty} \text{meas } P_{n,j} = m_n$. As in the proof of Theorem 4, for every n we can find a finite continuous function $d_n(r)$ on $0 \leqq r < R$ whose cluster set as $r \to R$ is K_n. Let $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < R$, where $\lim_{n\to\infty} r_n = R$. For every j and every $n \leqq j$, define $S_{n,j}$ to be the set of $r\,e^{i\vartheta}$ satisfying $\vartheta \in P_{n,j}$ and $r_j \leqq r < R$, and let $S = \bigcup_{\substack{n,j=1 \\ n\leq j}}^{\infty} S_{n,j}$. Evidently S is a closed set relative to $|z|<R$. For every j and every $n \leqq j$, define $h(z) = d_n(|z|)$ for every $z \in S_{n,j}$. The continuity of $h(z)$ on S now follows from the definition of S and the fact that for every j, any two of the perfect sets $P_{1,j}, P_{2,j}, \ldots, P_{j,j}$ are a positive distance apart. In accordance with TIETZE's theorem, extend $h(z)$ to a continuous function $g(z)$ in $|z|<R$. The set of radii $\arg z = \vartheta$, $0 \leqq |z| < R$ $\left(\vartheta \in \bigcup_{\substack{n,j=1 \\ n\leq j}}^{\infty} P_{n,j}\right)$ is a tress. An application of Theorem 1 to this tress and our function $g(z)$ now completes the proof of Theorem 6 for this case.

On the other hand, if all the sets K_n consist of one and the same point c, we must ensure that the function $f(z)$ obtained above is not identically constant. Since $\bigcup_{\substack{n,j=1 \\ n\leq j}}^{\infty} P_{n,j}$ is of first category, there exists a radius in $|z|<R$, disjunct from S, and whose intersection with the disk D_r is at a positive distance from $S \cap D_r$ $(0<r<R)$. In this case we impose the further condition on the function $h(z)$ defined above, that it be identically equal to some finite constant $c' \neq c$ on this radius.

Corollary 6. *Let* K *be an arbitrary continuum in the extended complex plane. Then there exists an* $f(z)$, *regular (and not constant) in* $|z|<R$, *such that the cluster set of* $f(z)$ *on almost every radius of* $|z|<R$ *is* K.

§ 6. Definition 2. A *restricted tress* $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ *in* $|z|<R$, *relative to* E, is a tress satisfying the following condition:

---

[23]) *Cf.* HOBSON, E. W.: *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, 3. ed., vol. I, p. 192. Cambridge 1927.

(iii) If $z \in \bigcup_{j=1}^{n} T_j - \{0\}$, then the unique $\tau = \tau(z) \in E$ such that $z \in t_\tau$, is a continuous function of z on the set $\bigcup_{j=1}^{n} T_j - \{0\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Remark 7. As is easily seen, the tresses given in Examples 1 to 4 are all restricted tresses. Examples of tresses that are not restricted, even for an enumerable E, can be constructed without difficulty.

As another application of Theorem 1, we prove the following theorem, which contains results due to A. ROTH[24]).

Theorem 7. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress in $|z| < R$, relative to E. Suppose that $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are real-valued functions (which may assume the values $\pm\infty$) of $\tau \in E$. Then, a necessary and sufficient condition that there exist a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for every $\tau \in E$,*

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \Re f(z) = \alpha(\tau) \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \Im f(z) = \beta(\tau),$$

is that $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ be of BAIRE *class ≤ 1 on E.*

Proof. Let $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < R$, where $\lim_{n \to \infty} r_n = R$.

To prove the necessity of the condition, it suffices to note that if $f(z)$ is a regular function in $|z| < R$ satisfying the limit relations in the theorem, and if we set $\alpha_n(\tau) = \Re f(t_\tau \cap C_{r_n})$ and $\beta_n(\tau) = \Im f(t_\tau \cap C_{r_n})$ $\left(n = 1, 2, 3, \ldots; \tau \in \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$, then, making use of (iii) and the continuity of $f(z)$ on C_{r_n}, we see that $\alpha_n(\tau)$ and $\beta_n(\tau)$ are continuous functions of $\tau \in \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, and we have $\lim_{n \to \infty} \alpha_n(\tau) = \alpha(\tau)$ and $\lim_{n \to \infty} \beta_n(\tau) = \beta(\tau)$ for every $\tau \in E$.

Now let us prove the sufficiency of the condition. Since $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are, by hypothesis, of BAIRE class ≤ 1 on E, there exist real-valued functions $\alpha_n(\tau)$, $\beta_n(\tau)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, each of which is continuous and finite (or even bounded) on E, such that, for every $\tau \in E$, $\lim_{n \to \infty} \alpha_n(\tau) = \alpha(\tau)$ and $\lim_{n \to \infty} \beta_n(\tau) = \beta(\tau)$. For every $\tau \in E$, let

$$\xi(z) = \frac{(|z| - r_n)\,\alpha_{n+1}(\tau(z)) + (r_{n+1} - |z|)\,\alpha_n(\tau(z))}{r_{n+1} - r_n} \tag{17}$$

and

$$\eta(z) = \frac{(|z| - r_n)\,\beta_{n+1}(\tau(z)) - (r_{n+1} - |z|)\,\beta_n(\tau(z))}{r_{n+1} - r_n} \tag{18}$$

for

$$z \in t_\tau \cap \overline{D_{r_{n+1}} - D_{r_n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

It follows from (iii) that, for every $\tau \in E$, $\xi(z)$ and $\eta(z)$ are continuous on $\overline{t_\tau - D_{r_1}}$, where the closure is taken relative to $|z| < R$; moreover, it is evident

[24]) ROTH, A.: *loc. cit.*, pp. 123 and 125, Theorems VI and VI'.

from (17) and (18) that

$$\min\left(\alpha_n(\tau), \alpha_{n+1}(\tau)\right) \leq \xi(z) \leq \max\left(\alpha_n(\tau), \alpha_{n+1}(\tau)\right)$$

and

$$\min\left(\beta_n(\tau), \beta_{n+1}(\tau)\right) \leq \eta(z) \leq \max\left(\beta_n(\tau), \beta_{n+1}(\tau)\right)$$

for $z \in t_\tau \cap \overline{D_{r_{n+1}} - D_{r_n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, so that

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \xi(z) = \alpha(\tau) \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \eta(z) = \beta(\tau).$$

Let

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_j) \cap \overline{(D_{r_{j+1}} - D_{r_j})}\right],$$

and

$$\xi^*(z) = \xi(z), \quad \eta^*(z) = \eta(z), \qquad z \in M.$$

It is clear from (ii) that M is closed relative to $|z| < R$, and (iii) implies that $\xi^*(z) + i\,\eta^*(z)$ is continuous on M, so that, according to TIETZE's theorem, this function can be extended to a continuous function $g(z)$ in $|z| < R$. An application of Corollary 1 now completes the proof.

By combining the methods of proof of Theorems 3 and 7, one readily obtains

Theorem 8. *Let M be a non-empty, closed, nowhere dense set in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, and let $\alpha(\vartheta)$ and $\beta(\vartheta)$ be real-valued functions of* BAIRE *class ≤ 1 on M. Then there exists an $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for every $\vartheta \in M$,*

$$\lim_{r \to R} \Re f(r e^{i\vartheta}) = \alpha(\vartheta) \quad \textit{and} \quad \lim_{r \to R} \Im f(r e^{i\vartheta}) = \beta(\vartheta),$$

and, for every $\vartheta \notin M$ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, the cluster set of $f(z)$ on $\arg z = \vartheta$, *as $|z| \to R$, is the whole complex plane.*

§ 7. A theorem due to KIERST and MAZURKIEWICZ[25]) asserts that a necessary and sufficient condition that a set of points in the extended complex plane be the set of asymptotic values of a function $f(z)$, regular in $|z| < 1$, is that the set be analytic. This theorem refers to the asymptotic values of $f(z)$ along all possible paths in $|z| < 1$ tending to the boundary. The next two theorems deal with the analogous question for certain specified families of asymptotic paths in $|z| < R$.

Definition 3. Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress in $|z| < R$, relative to E, and assume that the power of E is $2^{\aleph_0}$. Every function that is regular in $|z| < R$ and tends to a limit, finite or infinite, along every mb-path belonging to $\mathcal{T}$, as $|z| \to R$, will be called a *$\mathcal{T}$-function*, and the set of all these limits (regarded as points in the extended complex plane) will be called the *$\mathcal{T}$-set* of this function.

---

[25]) *Cf.* KIERST, S.: *Sur l'ensemble des valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe dans le cercle-unité.* Fundamenta Mathematicae **27**, 226—233 (1936), p. 233. The analogue of this result for entire functions was recently announced by HEINS, M. H.: *The set of asymptotic values of an entire function.* Bull. Amer. Math. Soc. **60**, 150 (1954).

Using this definition, we now formulate

Theorem 9. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress in $|z| < R$, relative to E, where E is of power $2^{\aleph_0}$. A necessary and sufficient condition that a non-empty set A in the extended complex plane be the $\mathcal{T}$-set of some $\mathcal{T}$-function is that A be an analytic set.*

Proof. The condition is necessary. For if A is the $\mathcal{T}$-set of the $\mathcal{T}$-function $f(z)$, then it follows from Theorem 7 that A is the image of a function of BAIRE class defined on the BOREL set E, and hence[26]) A is an analytic set.

The condition is sufficient. For let A be a given non-empty analytic set in the extended complex plane. Then[27]) A is the image of a function $\alpha(\tau) + i\,\beta(\tau)$ defined on E, where $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are real-valued functions (which may assume the values $\pm\infty$) of BAIRE class ≤ 1 on E. An application of Theorem 7 now yields a $\mathcal{T}$-function whose $\mathcal{T}$-set is A.

Definition 4. Let $f(z)$ be regular in $|z| < R$. By the *radial limit set* of $f(z)$ we shall mean the set of points w in the extended complex plane such that, for some ϑ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $\lim_{r \to R} f(r\,e^{i\vartheta}) = w$.

Theorem 10. *A necessary and sufficient condition that a set A in the extended complex plane be the radial limit set of a function regular in $|z| < R$ is that A be an analytic set.*

Proof. The condition is necessary. For if $f(z)$ is regular in $|z| < R$, then the radial limit set is an analytic set. Indeed, the set V of values of ϑ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ for which $\lim_{r \to R} f(r\,e^{i\vartheta}) = w_\vartheta$ (possibly infinite) exists is[28]) an $F_{\sigma\delta}$, and the assertion now follows[29]) from the fact that w_ϑ is of BAIRE class ≤ 1 on V.

The condition is also sufficient. The case in which A is empty is taken care of by an example given by BIEBERBACH[30]). In case A is not empty, let V be a perfect, nowhere dense subset of the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Then, by applying the methods of the sufficiency proofs of Theorems 3 and 9, and noting Remark 4, it is seen that there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $\lim_{r \to R} f(r\,e^{i\vartheta}) = w_\vartheta$ exists if, and only if, $\vartheta \in V$, and $\{w_\vartheta : \vartheta \in V\} = A$.

The following theorem represents a generalization in several directions of a classical example due to W. GROSS[31]).

Theorem 11. *Let A be an arbitrary non-empty analytic set in the extended complex plane. Then there exists an $f(z)$, regular in $|z| < R$, and a subset M*

---

[26]) *Cf.* HAUSDORFF, F.: *Mengenlehre*, 2. ed., p. 269. Berlin u. Leipzig 1927.

[27]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.*[6]), pp. 388, 353, 283.

[28]) *Cf.* HAUSDORFF, F.: *loc. cit.*, p. 273.

[29]) *Ibid.*, p. 269.

[30]) BIEBERBACH, L.: *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Bd. II, pp. 152—155. Leipzig u. Berlin 1931.

[31]) GROSS, W.: *Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist.* Math. Ann. **79**, 201—208 (1919). *Cf.* also A. ROTH, *loc. cit.*, p. 120, footnote 38.

of the interval $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, *where* M *is an* F_σ *of first category and of positive measure*[32]) *in every subinterval of* $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, *with the following properties:*

(A) *For every* $\vartheta \in M$, $\lim_{r \to R} f(r e^{i\vartheta}) = w_\vartheta$ *(possibly infinite) exists.*

(B) *If* I *is any subinterval of* $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, *then* $A = \{w_\vartheta : \vartheta \in M \cap I\}$, *and for every* $a \in A$, *there are* $2^{\aleph_0}$ *values of* $\vartheta \in M \cap I$ *for which* $w_\vartheta = a$.

Proof. It is an elementary matter to show by mathematical induction that in every subinterval I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ of $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ with rational end points, there exists a perfect, nowhere dense set P_n of positive measure such that, if $j \neq k$, then $P_j \cap P_k$ is empty. The set $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ is an F_σ of first category, of positive measure in every subinterval of $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, and the set of radii $\arg z = \vartheta$, $|z| < R$ $(\vartheta \in M)$ is evidently a restricted tress in $|z| < R$ (*cf.* Example 1). Denote the RIEMANN sphere by S and the closed unit interval of real numbers by J. If we regard A as a subset of S, then[33]) the Cartesian product $A \times J$ is an analytic set in $S \times J$. For $n = 1, 2, 3, \ldots$ let $h_n(\vartheta)$ be a (single-valued) function of BAIRE class $\leqq 1$ mapping P_n on $A \times J$, let g be the function that projects $A \times J$ onto A, and set $d_n(\vartheta)$ equal to the composite function $g\, h_n(\vartheta)$; then[27]) $d_n(\vartheta)$ is a function of BAIRE class $\leqq 1$ mapping P_n onto A in such a manner that every point of A is the image of $2^{\aleph_0}$ values of $\vartheta \in P_n$. If we define $d(\vartheta)$ on M to be identical with $d_n(\vartheta)$ on P_n for every n, then[34]) $d(\vartheta) = \alpha(\vartheta) + i\,\beta(\vartheta)$ is of BAIRE class $\leqq 1$ on M, and an application of Theorem 7 now completes the proof.

Remark 8. Some of the foregoing theorems and corollaries (Theorems 6, 8, 10, 11, Corollaries 3 to 6), which, for the sake of simplicity, have been stated for radii, can obviously be extended to more general families of mb-paths, for example, those families of which the tresses in Examples 1 to 4 are subfamilies.

Added in proof: Theorem 1 for $R = +\infty$ is a consequence of a theorem due to KELDYSH, M. V., and M. A. LAVRENTIEV, *Sur un problème de M. Carleman* (in Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S. **23**, 746—748 (1939). We are indebted to W. KAPLAN for this reference. *Cf.* also MERGELYAN, S. N.: *Uniform approximations to functions of a complex variable* (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk, N. S. **7**, no. 2 (48), 31—122 (1952). Amer. Math. Soc. Transl. No. 101, p. 34. Providence 1954.

---

[32]) As the proof will show, the theorem holds equally well if the words "positive measure" are replaced by "measure zero". Note that M is independent of A and $f(z)$.

[33]) *Cf.* HAHN, H.: *loc. cit.*, p. 351.

[34]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.*[6]), p. 284.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.).
Dept. of Math., University of Notre Dame, Notre Dame, Ind. (U.S.A.).

(Eingegangen am 8. Juli 1954.)

Künzi, H. P.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 200—205 (1954)

Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet.

Von
Hans P. Künzi.

1. Einleitung.

In einer vorangehenden Arbeit [3] wurden Riemannsche Flächen mit endlich vielen einfach- und doppeltperiodischen Enden bezüglich ihrer Wertverteilungsgrößen (Ordnung, Defekt und Verzweigungsindizes) eingehend untersucht. Hierzu wurde eine Uniformisierungsmethode angegeben, die der Art der zu untersuchenden Flächen besonders gut angepaßt war.

In der vorliegenden Arbeit möchte ich in Ergänzung der oben zitierten zeigen, daß sich diese Uniformisierungsmethode auch dann noch anwenden läßt, wenn das Existenzgebiet der oben erwähnten Flächen mehrfach zusammenhängend ist. In unseren weiteren Untersuchungen beschränken wir uns auf den Fall eines endlich zusammenhängenden Existenzgebietes.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit möchte ich auf die von G. af Hällström ausgeführten Untersuchungen in seiner interessanten Dissertation [2] hinweisen. Dort versucht der Verfasser, die klassischen Ergebnisse der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre [4] für mehrfach zusammenhängende Gebiete zu erweitern. Es werden zwei verschiedene Typen von Grundgebieten betrachtet, nämlich solche, in denen die Randpunkte (wesentliche Singularitäten für die Funktion) in endlicher Zahl vorkommen und weitere, bei denen unendlich viele Ausnahmepunkte mit einer einzigen Häufungsstelle auftreten.

Zur Ausschöpfung solcher Gebiete werden bestimmte Potentialfunktionen nach H. Selberg verwendet, die von einer bestimmten Massenbelegung abhängen. Hällström weist darauf hin, daß die Berechnung der charakteristischen Funktionen zeige, wie die Größen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ für eine Funktion eine so überaus große Mannigfaltigkeit an Größenordnungen besitzen, daß sie eher für die Massenbelegung und deren Potentialfunktion als charakteristisch zu betrachten seien.

Im Falle der endlich vielfach punktierten Ebene gelten die beiden Hauptsätze entsprechend dem klassischen Falle.

Für unendlich viele Ausnahmepunkte ist für die Existenz der Defektrelation eine zusätzliche Bedingung notwendig.

In unseren folgenden Untersuchungen werden wir an Stelle der Ausschöpfung der Ebene durch Niveaulinien gewisser Potentialfunktionen eine unserer Funktionsklasse näher angepaßte, durch kreisähnliche Kurven einführen.

2. Streckenkomplexe mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten.

Wie aus der allgemeinen Theorie der Streckenkomplexe hervorgeht[1]), zeigt Fig. 1 ein Beispiel eines Komplexes, für welchen das Existenzgebiet der zugehörigen Funktion von dreifachem Zusammenhang ist, denn die einzelnen Teilkomplexe häufen sich gegen drei getrennte Punkte. Auf diese Weise gelingt es uns ganz allgemein, Streckenkomplexe von n-fachem Zusammenhang anzugeben.

Wie eingangs erwähnt, beschränken wir uns auf Streckenkomplexe von endlichem Zusammenhang und im weiteren auf solche, bei denen die einzelnen Teilkomplexe periodische Enden aufweisen.

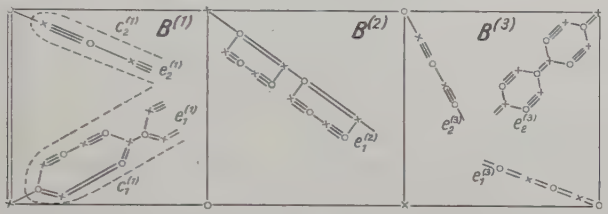

Fig. 1.

Ein Streckenkomplex mit n-fachem Zusammenhang läßt sich durch eine Konfiguration von n Blöcken $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ darstellen. Die einzelnen Enden werden, beginnend bei irgendeinem Ende in jedem Blocke im positiven Drehsinn numeriert $(\mathfrak{e}_1^{(\nu)}, \mathfrak{e}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{e}_{p^{(\nu)}}^{(\nu)})$. Die Anzahl der Enden in den Blöcken ist im allgemeinen voneinander verschieden. Es ist bekannt, daß durch Vorgabe des Streckenkomplexes $\mathfrak{S}$, der Grundpunkte (Verzweigungspunkte) $\mathfrak{a}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ in der w-Ebene und der Zerschneidungskurve k_w der Riemannschen Fläche (vgl. [1], [3]) die Funktion $z = \zeta(w)$ bis auf eine Ähnlichkeitstransformation gegeben ist. Dadurch sind aber auch die Punkte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ (wesentliche Singularitäten in der z-Ebene) festgelegt bis auf die obige Transformation. Für unsere weiteren Berechnungen ist es unnötig, die Lage der Punkte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ zu kennen.

3. Die Uniformisierung.

Zur Uniformisierung denken wir uns aus der gegebenen Riemannschen Fläche diejenigen Teile ausgeschnitten, die im Streckenkomplex $\mathfrak{S}$ je einem Blocke $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ entsprechen. Jeden dieser Blöcke können wir nun nach den Methoden von [3] teils konform, teils quasikonform so in eine schlichte $Z^{(\nu)}$-Ebene abbilden, daß die wesentliche Singularität nach $Z^{(\nu)} = \infty$ fällt. Die n Blöcke werden damit in n schlichte Ebenen $|Z^{(\nu)}| \neq \infty$ uniformisiert.

Es würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, die einzelnen Uniformisierungsmethoden hier wiederzugeben. Wir wollen uns lediglich darauf beschränken, methodisch auf die verschiedenen Schritte hinzuweisen, und übernehmen Resultate und Bezeichnungen so weit dies erforderlich, aus meiner Arbeit [3].

[1]) Vgl. hierzu Elfving [1].

Ein besonders wichtiges Hilfsmittel in unserem Uniformisierungsverfahren bilden bestimmt konstruierte quasikonforme Abbildungen. Dabei handelt es sich um eineindeutige stetige und stückweise differenzierbare Abbildungen eines Gebietes der $z=x+iy$ Ebene auf ein Gebiet der $w=u+iv$ Ebene. Unter dem *Dilatationsquotienten* einer solchen Abbildungen verstehen wir die Größe

$$D_{w/z}=D_{z/w}=\frac{\operatorname{Max}|dw/dz|}{\operatorname{Min}|dw/dz|}.$$

Für den so eingeführten Verzerrungsquotienten ergibt eine einfache Rechnung

$$D=K+\sqrt{K^2-1}$$

mit

$$K=\frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{|u_x v_y-u_y v_x|}.$$

Für $D\equiv 1$ ist die Abbildung konform.

TEICHMÜLLER [5] und WITTICH [6] bewiesen den folgenden für uns wichtigen

Verzerrungssatz. *Die punktierte z-Ebene sei eineindeutig und quasikonform auf die punktierte w-Ebene abgebildet. Für eine relativ kleine Dilatation, für die das Integral*

$$\iint_{|z|>r}(D_{w/z}-1)\,\frac{dx\,dy}{|z|^2}$$

konvergiert, gilt bei Annäherung an den unendlichfernen Punkt

$$|w|\sim \text{const}\cdot|z|.$$

Eine derartige quasikonforme Abbildung, die dem obigen Verzerrungssatz genügt, nennen wir kreisähnlich.

Zur Bestimmung gewisser Wertverteilungsgrößen werden wir das Riemannsche Flächenstück, das zu einem Block gehört, in wieder endlich viele Teilstücke zerschneiden. Diese Flächenstücke werden konform und quasikonform in schlichte Gebiete einer Z-Ebene abgebildet und nachher mit den bestimmt konstruierten quasikonformen Abbildungen zu einer schlichten Z-Ebene verheftet. Auf Grund des Teichmüllerschen Verzerrungssatzes ist es uns erlaubt, die Wertverteilungsgrößen im quasikonformen Z-Bild zu berechnen.

Befassen wir uns vorerst nur mit Blöcken $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, die ausschließlich einfachperiodische Enden $\mathfrak{e}_\mu^{(\nu)}$ $(\mu=1,2,\ldots p^{(\nu)})$ aufweisen. Jeder Block besitzt dann auch $p^{(\nu)}$ logarithmische Elementargebiete, denen auf der Riemannschen Fläche über den Grundpunkten $\mathfrak{a}_k$ logarithmische Windungspunkte entsprechen.

Für ein genügend kleines t schneiden wir das Windungselement $|w-\mathfrak{a}_k|\leqq t$ aus der Fläche und uniformisieren dieses mit Hilfe des Logarithmus in eine Halbebene.

Nachdem alle logarithmischen Windungspunkte, die zu einem Block $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ gehören, uniformisiert sind, bleiben noch die Umgebungen (vgl. Fig. 1) der $p^{(\nu)}$ einfachperiodischen Enden, begrenzt durch $\mathfrak{C}_{p^{(\nu)}}^{(\nu)}$, zurück. Diese restlichen

Teilgebiete der Riemannschen Fläche uniformisieren wir mit den ihnen entsprechenden Umkehrfunktionen von $w_\mu^{(\nu)} = R_\mu^{(\nu)}(e^{\zeta})$ in Halbstreifen (vgl. [3]) ($R_\mu^{(\nu)}$ bedeutet eine rationale Funktion von e^{ζ}). Diese $p^{(\nu)}$-Halbstreifen müssen jetzt, abgesehen von einer unwesentlichen Nullpunktsumgebung längs ihrer Berandungen so verheftet werden, wie dies durch die Urbilder auf der Riemannschen Fläche vorgegeben ist.

In entsprechender Weise können wir die Uniformisierung vornehmen, wenn neben einfachperiodischen noch doppeltperiodische Enden auftreten (vgl. [3]).

4. Die Wertverteilung.

Sind nach obiger Art sämtliche Blöcke $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) in punktierte Ebenen $Z^{(\nu)} \neq \infty$ uniformisiert, so schöpfen wir die einzelnen Blätter Z durch

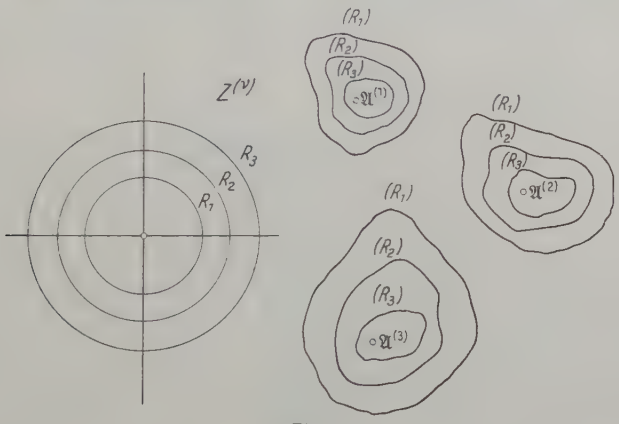

Fig. 2.

konzentrische Kreise $|Z^{(\nu)}| = R$ aus. Diesen n ausschöpfenden Kreissystemen entsprechen auf Grund des angegebenen Verzerrungssatzes n kreisähnliche Kurvensysteme im konformen ζ-Bild der n-fach punktierten Ebene, wobei sich die einzelnen Kurven eines Systems häufen gegen einen der Grundpunkte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Diese kreisähnlichen Kurven treten hier an die Stelle der Niveaulinien der Selbergschen Potentiale in der Hällströmschen Ausschöpfung.

Nach den Methoden in [3] berechnen wir jetzt für jedes Blatt $Z^{(\nu)}$ die uns interessierenden Anzahlfunktionen.

Nach den eingeführten Bezeichnungen gibt $\omega_\mu^{(\nu)}$ bzw. $\omega_{\mu'}^{(\nu)}$ ($\mu, \mu' = 1, 2 \ldots p^{(\nu)}$) die Anzahl der berandenden Außenknoten einer Periode der rechten bzw. der linken Berandung eines einfachperiodischen Endes an (rechts bzw. links gilt für die Berandung, wenn man vom Anfangsknoten in Richtung des Endes schaut).

Nun werden mit $g_\mu^{(\nu)}$ die Anzahl der in einer Periode des Endes $e_\mu^{(\nu)}$ auftretenden Innenknoten bezeichnet. Dann fixieren wir in jedem Block alle algebraischen Elementarpolygone deren $2m$ Seiten von Streckenzyklen $k, k+1$

gebildet sind und bezeichnen diese Anzahl mit $j^{(\nu)}$. Die zugehörigen halben Seitenzahlen seien $m_1, m_2, \ldots, m_{j^{(\nu)}}$.

Jetzt betrachten wir die Ausdrücke

$$\mathfrak{g}_\mu^{(\nu)}(a_k) = \sum_{h=1}^{j^{(\nu)}} m_h \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}_{1\mu}^{(\nu)}(a_k) = \sum_{h=1}^{j^{(\nu)}} (m_h - 1)$$

und bilden nach NEVANLINNA [4], WITTICH [7] und [3] die Anzahlfunktionen für alle $Z^{(\nu)}$-Ebenen mit $|Z| < R$:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \mathfrak{n}(R) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[R^{\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2}} \left(\sum_{\mu=1}^{p^{(\nu)}} \mathfrak{g}_\mu^{(\nu)} \cdot \Pi_\mu^{(\nu)} \right) \right] \\ \mathfrak{n}(R, a) = \mathfrak{n}(R) + O(1) \\ \mathfrak{n}(R, a_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[R^{\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2}} \left(\sum_{\mu=1}^{p^{(\nu)}} \mathfrak{g}_\mu^{(\nu)}(a_k) \, \Pi_\mu^{(\nu)} \right) \right] \quad (k = 1, \ldots m) \\ \mathfrak{n}_1(R, a_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[R^{\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2}} \left(\sum_{\mu=1}^{p^{(\nu)}} \mathfrak{g}_{1\mu}^{(\nu)}(a_k) \, \Pi_\mu^{(\nu)} \right) \right] \end{cases}$$

mit

$$\beta^{(\nu)} = 1 + \left(\frac{2}{p^{(\nu)}} \cdot \frac{\log A^{(\nu)}}{2\pi} \right)^2$$

und

$$\Pi_\mu^{(\nu)} = \frac{(A^{(\nu)})^{\mu - 1/p^{(\nu)}}}{A_\mu^{(\nu)}},$$

wobei

$$A^{(\nu)} = \frac{\omega_1^{(\nu)} \ldots \omega_{p^{(\nu)}}^{(\nu)}}{\omega_{1'}^{(\nu)} \ldots \omega_{p'^{(\nu)}}^{(\nu)}}$$

und

$$A_\mu^{(\nu)} = \frac{\omega_1^{(\nu)} \ldots \omega_{\mu-1}^{(\nu)}}{\omega_{1'}^{(\nu)} \ldots \omega_{\mu-1'}^{(\nu)}}.$$

Nach AHLFORS und WITTICH definieren wir die

$$\text{(II)} \quad \text{Ordnung} \quad \lambda = \max_{(\nu)} \left[\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2} \right],$$

$$\text{(III)} \quad \text{Defekte} \quad \delta(a_k) = 1 - \lim_{R \to \infty} \frac{\mathfrak{n}(R, a_k)}{\mathfrak{n}(R)},$$

$$\text{(IV)} \quad \text{Indizes} \quad \varepsilon(a_k) = \lim_{R \to \infty} \frac{\mathfrak{n}_1(R, a_k)}{\mathfrak{n}(R)}.$$

Die Werte von I eingesetzt, ergibt uns die gewünschten Wertverteilungsgrößen für die betrachtete Funktionsklasse.

5. Ergebnisse.

An Stelle der maximalen Ordnung λ, die wir allgemein als Ordnung der erzeugenden Funktion mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet bezeichnen, können wir noch die partiellen Ordnungen

$$\lambda^{(\nu)} = \beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zum Vergleich heranziehen, welche die Ordnungen der Funktion in den Umgebungen der wesentlichen Singularitäten $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ angeben.

Nach I, II, III und IV können wir für die Wertverteilung folgende Fälle unterscheiden:

(α) Eine der partiellen Ordnungen $\lambda^{(\nu)}$ ist größer als alle andern. In diesem Falle ist für die Wertverteilung nur das Verhalten der Funktion in der Umgebung von $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ maßgebend.

(α') Weisen sämtliche Blöcke gleich viele einfachperiodische Enden auf, d.h. $p^{(1)} = p^{(2)} = \cdots = p^{(n)}$, so kann man daraus noch nicht auf die Gleichheit der partiellen Ordnungen schließen, weil die Asymmetriefaktoren $\beta^{(\nu)}$ im allgemeinen voneinander verschieden sind. Hier würde diejenige Singularität die Wertverteilung bestimmen, der das größte $\beta^{(\nu)}$ zukommt.

(α'') Da ein $\beta^{(\nu)}$ irgendeinen endlichen Wert annehmen kann, so ist es möglich, daß die Wertverteilung von einer Singularität $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ abhängt, der nicht das größte $p^{(\nu)}$ entspricht.

(β) $$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \cdots = \lambda^{(h)} \qquad (h \leq n).$$

Bei dieser gleichmäßigen Ordnungsverteilung geben sämtliche Singularitäten $\mathfrak{A}^{(1)} \ldots \mathfrak{A}^{(h)}$ Beiträge zu den Defekten und Indizes.

(γ) Nach den Formeln aus Kap. IV von [3] lassen sich die Wertverteilungsgrößen I, II, III und IV auch dann explizite bestimmen, wenn in gewissen Blöcken auch doppeltperiodische Enden auftreten. Auf die Herleitung dieser Beziehungen wollen wir an dieser Stelle verzichten und weisen nur noch darauf hin, daß bei einem solchen Komplex ebenfalls Defekte auftreten können, trotz dem Vorhandensein doppeltperiodischer Enden, nämlich dann, wenn die Ordnung, die zu einem Block mit doppeltperiodischen Enden gehört, kleiner ist als diejenige irgendeines anderen Blockes mit nur einfachperiodischen Enden.

Aus diesen Fallunterscheidungen geht besonders deutlich hervor, wie wesentlich die Asymmetriefaktoren in unserer Funktionsklasse die Wertverteilung beeinflussen.

Literatur.

[1] Elfving, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. Fennicae, N. S. **2**, Nr. 3 (1934). — [2] Hällström, G. af: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. **12**, Nr. 8 (1940). — [3] Künzi, H. P.: Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre. Comm. Math. Helv. 29 (1955). — [4] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen, 2. Aufl. Springer 1953. — [5] Teichmüller, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. Dtsch. Math. **3** (1938). — [6] Wittich, H.: Zum Beweise eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. **51** (1949). — [7] Wittich, H.: Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. **122** (1950).

Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule, Mathemat. Institut.

(Eingegangen am 24. Juli 1954.)

Stoll, W.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 206—234 (1954)

Über meromorphe Modifikationen.

I. Allgemeine Eigenschaften der Modifikationen.

Von

Wilhelm Stoll.

Einleitung *).

Die komplexe Zahlenebene R^2 läßt sich bekanntlich mittels eines unendlichfernen Punktes zur Zahlenkugel P^2 abschließen. Eine andere Abschließung zu einer zusammenhängenden, zweidimensionalen, kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist nicht möglich. Dagegen kann der Zahlenraum R^{2n} von n komplexen Veränderlichen in verschiedener Weise, z. B. mit einer unendlichfernen Ebene zum projektiven Raum P^{2n} oder mit n unendlichfernen Ebenen zum n-fachen Produktraum $P^2 \times \cdots \times P^2$ abgeschlossen werden. Man kann dies auch so ausdrücken: Ein Punkt der Zahlenkugel kann nur durch sich selbst ersetzt werden, während eine Ebene der Dimension $n-1$ des projektiven Raumes R^{2n} im Falle $n>1$ durch n andere Ebenen ersetzt werden kann. Welche solche Ersetzungen sind möglich?

Allgemein kann man fragen, auf wieviel Arten sich eine $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G modifizieren läßt, indem man einen abgeschlossenen Teil M herausstieht und den Rest $A = G - M$ durch eine Menge N zu einer neuen Mannigfaltigkeit H erweitert. Behnke und Stein fassen diesen Begriff der Modifikation genauer so[1]):

1. *Zwei zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ seien gegeben.*

2. *Eine pseudokonforme Abbildung τ bilde die offene Menge $A \subseteq G$ auf $B \subseteq H$ ab.*

3. *Ist U eine Umgebung von $M = G - A$, so hat jeder Punkt $Q \in N = H - B$ eine Umgebung V mit $\tau^{-1}(V \cap B) \subseteq U$.*

Behnke und Stein beweisen, daß mit M auch N „klein" ist, genauer: „Wenn f in einer offenen Umgebung U von M analytisch, in keinem Teil-

*) Die Einleitung gibt eine Übersicht über eine Reihe von Arbeiten, die unter dem gemeinsamen Titel: „Über meromorphe Modifikationen" erscheinen werden. Teil I (§ 1—§ 3), Teil II (§ 4—§ 6) und Teil II (§ 7—§ 9) erscheinen in der Mathematischen Zeitschrift, Teil IV (§ 10—§ 12) und Teil V (§ 13—§ 16) in den Mathematischen Annalen.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen hat mir Herr Prof. H. Hopf freundlicherweise ein Manuskript seiner Arbeit [*9a*] zugesandt, die demnächst in den Comm. Math. Helv. erscheinen wird. In dieser Arbeit beweist H. Hopf seine bereits früher (in [*9*]) angekündigten Ergebnisse und verallgemeinert sie. Die vorliegende Folge von Arbeiten führt die Untersuchungen von H. Hopf weiter und gibt eine vollständige Antwort auf die Frage von H. Hopf, welche Modifikationen sich im Falle der Dimension 4 durch σ-Prozesse erzeugen lassen. Es sei daher besonders auf diese Arbeit von H. Hopf [*9a*] hingewiesen.

[1]) Man vgl. Behnke und Stein [*1*] S. 8.

gebiet von U identisch Null und auf M Null ist, so liegt N in einer Menge N^*, die in einer offenen Umgebung V von N analytisch ist und höchstens die Dimension $2n-2$ hat[2]).

Für die Zwecke dieser Arbeit wird der Begriff der Modifikation hiervon abweichend definiert, nämlich symmetrisch, worauf insbesondere H. Hopf hingewiesen hat, ohne die Forderung 3, da diese beispielsweise bei einer kompakten Mannigfaltigkeit G von selbst erfüllt ist; ferner werden M und N als „klein" vorausgesetzt:

a) *Komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ seien gegeben.*

b) *Die abgeschlossene Teilmenge M von G habe eine offene Umgebung, die eine M umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als $2n$ ist.*

c) *Die abgeschlossene Teilmenge N von H habe eine offene Umgebung, die eine N umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als $2n$ ist.*

d) *Durch eine Abbildung τ wird $A=G-M$ pseudokonform auf $B=H-N$ abgebildet. Die Umkehrung sei $v=\tau^{-1}$.*

Eine solche Modifikation werde mit $\mathfrak{M}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ bezeichnet; sie braucht keine Modifikation im Sinne von Behnke und Stein zu sein. Ebensowenig braucht eine Modifikation im Sinne von Behnke und Stein die Forderungen a) bis d) zu erfüllen.

Mit $\mathfrak{M}$ ist auch $\mathfrak{M}^{-1}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}H, B, N, v\\ G, A, M, \tau\end{pmatrix}$ eine Modifikation und heiße die *inverse Modifikation* zu $\mathfrak{M}$. Die Modifikation $\mathfrak{M}$ heiße offen, wenn die dritte Forderung der Definition von Behnke und Stein erfüllt ist; ist auch $\mathfrak{M}^{-1}$ offen, so heiße $\mathfrak{M}$ beiderseits offen. Ist v in allen Punkten von N regulär, so heiße $\mathfrak{M}$ analytisch. Zwei Modifikationen $\mathfrak{M}_\nu=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G_\nu, A_\nu, M_\nu, \tau_\nu\\ H_\nu, B_\nu, N_\nu, v_\nu\end{pmatrix}$ heißen äquivalent, wenn es eine pseudokonforme Abbildung α von G_1 auf G_2 und eine pseudokonforme Abbildung β von H_1 auf H_2 gibt, so daß gilt:

$$\alpha(G_1)=G_2,\quad \alpha(A_1)=A_2,\quad \alpha(M_1)=M_2, \tag{0.1}$$

$$\beta(H_1)=H_2,\quad \beta(B_1)=B_2,\quad \beta(N_1)=N_2, \tag{0.2}$$

$$\beta^{-1}\tau_2\alpha(P)=\tau_1(P)\quad \text{für}\quad P\in A_1, \tag{0.3}$$

$$\alpha^{-1}v_2\beta(Q)=v_1(Q)\quad \text{für}\quad Q\in B_1. \tag{0.4}$$

H. Hopf[3]) hat darauf hingewiesen, daß man bereits einen einzigen Punkt mittels einer Modifikation durch eine Kurve ersetzen kann. Seien nämlich P^2 die Zahlenkugel und

$$^0G=\{(z_1, z_2)\,|\,|z_1|<1,\quad |z_2|<1\}, \tag{0.5}$$

$$^0M=\{(0,0)\},\quad {}^0A={}^0G-{}^0M, \tag{0.6}$$

[2]) Man vgl. Behnke und Stein [1] S. 14. Dort wird M kompakt vorausgesetzt, was unnötig ist; man vgl. Satz 2.5.

[3]) Man vgl. H. Hopf [9], [9a], ferner Zariski [20], Behnke und Stein [1], Hirzebruch [6], [7], [8] und Calabi und Rosenlicht [2]. Die Definition des σ-Prozesses in dieser Arbeit wird in § 10 gegeben.

$$(0.7)\quad {}^0H = \{(\mathfrak{z},\zeta)\,|\, z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 = 0,\quad \mathfrak{z} = (z_1, z_2) \in {}^0G,\quad \zeta = (\zeta_1 : \zeta_2) \in P^2\},$$

$$(0.8)\quad {}^0N = {}^0M \times P^2,\quad {}^0B = {}^0H - {}^0N,$$

$$(0.9)\quad {}^0\sigma(z_1, z_2) = (z_1, z_2,\ z_1 : z_2)\quad \text{für}\quad (z_1, z_2) \in {}^0A,$$

$$(0.10)\quad {}^0v(\mathfrak{z},\zeta) = \mathfrak{z}\quad \text{für}\quad (\mathfrak{z},\zeta) \in {}^0H.$$

Dabei kann man ${}^0H$ als Raum der auf den Nullpunkt gerichteten Linienelemente von ${}^0G$ auffassen. Es ist

$$(0.11)\quad {}^0\mathfrak{S} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} {}^0G, {}^0A, {}^0M, {}^0\sigma \\ {}^0H, {}^0B, {}^0N, {}^0v \end{pmatrix}$$

eine analytische, beiderseits offene Modifikation, die den Nullpunkt durch die „Trägersphäre" ${}^0N$ ersetzt. Dies ist ein rein lokaler Prozeß. Man kann ihn daher auf Mannigfaltigkeiten ausüben. Ist P ein Punkt einer vierdimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G, so gibt es eine, und bis auf Äquivalenz nur eine Modifikation

$$(0.12)\quad \mathfrak{S}_P = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, \{P\}, \sigma_P \\ H, B, N, v_P \end{pmatrix},$$

für die gilt: Es gibt eine offene Umgebung ${}_0G$ von P und eine offene Umgebung ${}_0H$ von N, so daß die Modifikation

$$(0.13)\quad \mathfrak{M} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} {}_0G, {}_0G \cap A, \{P\}, \sigma_P \\ {}_0H, {}_0H \cap B, N, v_P \end{pmatrix}$$

der Modifikation ${}^0\mathfrak{S}$ äquivalent ist. $\mathfrak{S}_P$ heiße ein σ-Prozeß im Punkt P; er ist eine analytische, beiderseits offene Modifikation.

Einen σ-Prozeß kann man nach H. HOPF auch in einer beliebigen abgeschlossenen Menge M einer komplexen Mannigfaltigkeit G der Dimension 4 definieren. Dazu führt man in jedem Punkt $P \in M$ einen σ-Prozeß

$$(0.14)\quad \mathfrak{S}_P = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, & A_P, \{P\}, \sigma_P \\ H_P, B_P, & N_P, v_P \end{pmatrix}$$

aus und identifiziert die offenen Teilmengen $H_P^* = H_P - \overline{\sigma_P(M \cap A_P)}$ in den Punkten $B_P^* = H_P^* \cap B_P$ vermöge den Abbildungen $v_Q\,\sigma_P$ von B_P^* auf B_Q^*. Man erhält dadurch eine analytische Modifikation

$$(0.15)\quad \mathfrak{S}_M = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix},$$

die der σ-Prozeß in der Menge M heiße.

Übt man längs einer analytischen Ebene im Koordinatenraum R^4 einen σ-Prozeß aus, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit ohne abzählbarer Basis der offenen Mengen[4]). Daher wird in dieser Arbeit bei der Definition der komplexen Mannigfaltigkeit nicht die Existenz einer abzählbaren Basis der offenen Mengen verlangt.

[4]) Dieses Beispiel wurde von H. HOPF in Vorträgen in Zürich und Oberwolfach gegeben und davon unabhängig von CALABI und ROSENLICHT [2] veröffentlicht. Nach RADÓ hat eine zusammenhängende, zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit immer eine abzählbare Basis der offenen Mengen.

Der σ-Prozeß in einem Punkt P_0 ersetzt diesen durch eine Trägersphäre $N = N_0$, setzt man in einem Punkt von N_0 wieder eine Trägersphäre N_1 ein, so wird P_0 insgesamt durch zwei Trägersphären ersetzt; so kann man fortfahren. Nach H. Hopf erhält man auf diese Art im wesentlichen alle Ersetzungen eines Punktes:

Satz von H. Hopf[5]).

Besteht M aus einem einzigen Punkt P_0, ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *offen (sie ist in diesem Fall analytisch) und ist N kompakt, so gibt es eine endliche Folge von σ-Prozessen*

$$\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_\nu, & A_\nu, & \{P_\nu\}, & \sigma_{P_\nu} \\ H_{\nu+1}, & B_{\nu+1}, & N_{\nu+1}, & v_{P_\nu} \end{pmatrix} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1) \tag{0.16}$$

in Punkten P_ν mit $P_\nu \in N_\nu$ für $\nu > 0$, so daß gilt

$$\begin{cases} H_0 = G, \quad A_0 = A, \quad H_s = H \\ B = \sigma_{P_{s-1}} \ldots \sigma_{P_0}(A) \\ N = N_s \cup \bigcup\limits_{\mu=1}^{s-1} \sigma_{P_{s-1}} \ldots \sigma_{P_\mu}(A_\mu \cap N_\mu) \\ \tau(P) = \sigma_{P_{s-1}} \ldots \sigma_{P_0}(P) \quad \text{für} \quad P \in A \\ v(Q) = v_{P_0} \ldots v_{P_{s-1}}(Q) \quad \text{für} \quad Q \in B. \end{cases} \tag{0.17}$$

Man sagt die Modifikation $\mathfrak{M}$ werde durch σ-Prozesse erzeugt.

Dieser Satz wird auf beliebige analytische Modifikationen ausgedehnt werden, bei denen also N nicht mehr kompakt zu sein braucht und M aus mehr als einem Punkt bestehen kann, allerdings wird $n = 2$ vorausgesetzt. Dann kommt man aber nicht immer mit endlich vielen σ-Prozessen aus[6]).

Von H. Hopf wurde nun die Frage gestellt, welche Modifikationen $\mathfrak{M}$ zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten G und H sich erzeugen lassen, indem man beiderseits (in G und H) in geeigneter Weise nach und nach endlich viele σ-Prozesse ausübt und dabei schließlich zur selben Mannigfaltigkeit kommt; anders ausgedrückt, indem man auf G die Operationen *„Einsetzen einer Trägersphäre"* und *„Herausnehmen einer Trägersphäre"* endlich oft ausführt und so zu H mittels einer zu $\mathfrak{M}$ äquivalenten Modifikation gelangt.

Ein Beispiel zeigt, daß dies nicht immer möglich ist: G sei der projektive Raum mit homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$, H sei der projektive Raum mit homogenen Koordinaten $(y_0 : y_1 : y_2)$,

$$M = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_2 = 0\}, \quad A = G - M,$$
$$N = \{(y_0 : y_1 : y_2) \mid y_2 = 0\}, \quad B = H - N,$$

$$\tau(x_0 : x_1 : x_2) = \left(x_0 : \left[x_1 - x_0 e^{\frac{x_0}{x_2}}\right] : x_2\right), \quad v(y_0 : y_1 : y_2) = \left(y_0 : \left[y_1 + y_0 e^{\frac{y_0}{y_2}}\right] \cdot y_2\right).$$

[5]) Man vgl. H. Hopf [9] S. 180—182, [9a] und Zariski [20]. Bei H. Hopf besteht M nur aus einem einzigen Punkt. Der Satz wird in [9a] auch auf allgemeinere Abbildungen übertragen.

[6]) Man vgl. § 11 und § 14.

Es ist $\mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine beiderseits offene Modifikation zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten, die sich nicht durch σ-Prozesse erzeugen läßt; denn bei einem σ-Prozeß geht jede analytische Menge in eine analytische Menge über. Im vorliegenden Fall geht aber $L = \{(x_0 : x_1 : x_2) | \, x_1 = 0\}$ in

$$L^* = \tau(L \cap A) = \left\{(y_0 : y_1 : y_2) \middle| \, y_1 + y_0 e^{\frac{y_0}{y_2}} = 0\right\} \tag{0.18}$$

über und L^* ist in N singulär.

Das Gegenbeispiel rührt vom Auftreten wesentlicher Singularitäten her. Um diese zu vermeiden, wird der Begriff einer „meromorphen" Abbildung eingeführt. Dies geschieht hier in Anlehnung an den Satz von CASORATI-WEIERSTRASS:

Eine Abbildung τ heiße auf einer komplexen Mannigfaltigkeit G der Dimension $2n$ *meromorph*, wenn gilt:

a) *Eine offene Teilmenge A von G werde durch τ analytisch in eine $2m$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H abgebildet.*

b) *In einer offenen Umgebung U von $M = G - A$ liege eine M umfassende analytische Menge, deren Dimension höchstens $2n-2$ ist.*

c) *Ist L eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit aus G, die M in einem und nur einem Punkt P_0 schneidet, sind $P_1^\nu \in A \cap L$ und $P_2^\nu \in A \cap L$ Folgen mit*

$$\lim_{\nu\to\infty} P_1^\nu = P_0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_1^\nu) = Q_1 \in H, \tag{0.19}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} P_2^\nu = P_0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_2^\nu) = Q_2 \in H, \tag{0.20}$$

so ist $Q_1 = Q_2$.

Wird G durch die meromorphe Abbildung τ in den projektiven Raum P^{2m} abgebildet, so wird diese Abbildung durch meromorphe Funktionen gegeben und nur dann[7]). Also ist der Begriff der meromorphen Abbildung sinnvoll. Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ heiße meromorph, wenn τ eine meromorphe Abbildung von G in H ist, beiderseits meromorph, wenn auch $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph ist. Eine analytische Modifikation ist beiderseits meromorph. Im Falle $n = 2$ ist eine meromorphe Modifikation beiderseits meromorph.

Beiderseits offene und meromorphe Modifikationen lassen sich im Falle $n = 2$ durch σ-Prozesse erzeugen. Der Beweis beruht im wesentlichen auf dem

Hauptsatz über meromorphe Modifikationen[8]).

Ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ beiderseits offen, meromorph und ist die Abbildung τ im Punkt P_0 singulär, so gibt es eine rein zweidimensionale analytische Menge $C(P_0)$ aus H, die in N liegt, und eine Menge $D \subset C(P_0)$ ohne Häufungspunkte enthält, so daß v auf $C(P_0) - D$ regulär ist. Wenn $v(Q, H)$

[7]) Man vgl. Satz 4.1.

[8]) Man vgl. Satz 9.3 und Satz 9.4.

die analytische Fortsetzung von v in $B \cup [C(P_0) - D]$ ist, so ist $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in C(P_0) - D$. Die Zuordnung $P_0 \to C(P_0)$ ist also eineindeutig.

Ist H kompakt, so hat die Abbildung τ demnach höchstens endlich viele singuläre Stellen.

Der Satz über die Erzeugbarkeit meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse lautet für Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten[9]:

Ist $\mathfrak{M} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}$ *eine meromorphe Modifikation zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten (sie ist dann beiderseits offen und beiderseits meromorph), so gibt es zwei Ketten von σ-Prozessen*

$$\mathfrak{S}_\nu = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} H_\nu, & A_\nu, & M_\nu, & \sigma_\nu \\ H_{\nu+1}, & B_{\nu+1}, & N_{\nu+1}, & v_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1), \tag{0.21}$$

$$\underline{\mathfrak{S}}_\nu = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} \underline{H}_\nu, & \underline{A}_\nu, & \underline{M}_\nu, & \underline{\sigma}_\nu \\ \underline{H}_{\nu+1}, & \underline{B}_{\nu+1}, & \underline{N}_{\nu+1}, & \underline{v}_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \underline{s}-1) \tag{0.22}$$

mit

$$H_0 = G, \quad A_0 \supseteq A, \quad M_0 \subseteq M, \quad M_{\nu+1} \subseteq N_{\nu+1}, \tag{0.23}$$

$$\underline{H}_0 = H, \quad \underline{A}_0 \supseteq B, \quad \underline{M}_0 \subseteq N, \quad \underline{M}_{\nu+1} \subseteq \underline{N}_{\nu+1}, \tag{0.24}$$

$$H_s = \underline{H}_{\underline{s}}, \tag{0.25}$$

$$\tau(P) = \underline{v}_0 \ldots \underline{v}_{\underline{s}-1}\, \sigma_{s-1} \ldots \sigma_0(P) \quad \text{für} \quad P \in A, \tag{0.26}$$

$$v(Q) = v_0 \ldots v_{s-1}\, \underline{\sigma}_{\underline{s}-1} \ldots \underline{\sigma}_0(Q) \quad \text{für} \quad Q \in B. \tag{0.27}$$

Die Abbildung $\tau\, v_0 \ldots v_{\nu-1}$ ist in M_ν singulär, in A_ν regulär. Die Abbildung $v\, \underline{v}_0 \ldots \underline{v}_{\nu-1}$ ist in $\underline{M}_\nu$ singulär, in $\underline{A}_\nu$ regulär. Die Mengen M_ν und $\underline{M}_\nu$ sind endlich.

Die Mengen M_ν und $\underline{M}_\nu$, in denen die σ-Prozesse ausgeführt werden, sind durch innere Eigenschaften der gegebenen Modifikation eindeutig bestimmt. Dies ist erforderlich, um überflüssige σ-Prozesse zu vermeiden.

Eine birationale Transformation zwischen zwei algebraischen Mannigfaltigkeiten ist ein Beispiel einer beiderseits meromorphen Modifikation. Umgekehrt ist jede beiderseits meromorphe Modifikation zwischen algebraischen Mannigfaltigkeiten eine birationale Transformation. Die beiderseits meromorphen Modifikationen stellen somit eine Verallgemeinerung der birationalen Transformationen dar[10].

Auf algebraischen Flächen treten „nichtsphärische" Punkte auf. Daher liegt es nahe, auch Modifikationen Riemannscher Bereiche[11] zu untersuchen. Nun hat aber Hirzebruch [7] den Übergang von Riemannschen Bereichen zu komplexen Mannigfaltigkeiten im Falle $n = 2$ schon durchgeführt. Daher kann man sich im Falle $n = 2$ o.B.d.A. auf Modifikationen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten beschränken.

[9] Man vgl. Satz 12.1. Der allgemeine Fall wird in den Sätzen 15.1 und 16.3 erledigt.
[10] Dies ergibt sich aus den Sätzen 4.1 und 4.4.
[11] Man vgl. Hirzebruch [7].

In der vorliegenden Arbeit (Teil I) werden lediglich die Grundbegriffe geklärt. Es werden nur einfache Eigenschaften der Modifikationen bewiesen, insbesondere offener. In der nächsten Arbeit werden meromorphe und analytische Modifikationen eingeführt und einfachere Ergebnisse über sie gewonnen. In den dann folgenden Teilen müssen die Untersuchungen jedoch der auftretenden Schwierigkeiten wegen auf den Fall $n=2$ beschränkt werden. Die Identitätssätze in § 6 (Teil II) bilden vielleicht einen bescheidenen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen im Falle $n>2$. In Teil III werden Sätze über die Streueigenschaften analytischer und meromorpher Modifikationen im Falle $n=2$ aufgestellt, die in den darauffolgenden Teilen den Beweis der Sätze über die Erzeugung analytischer bzw. meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse ermöglichen werden.

Diese Reihe von Arbeiten geht auf Anregungen zurück, die ich während eines Zürcher Studienaufenthaltes im Wintersemester 1952/53 von Herrn Professor H. HOPF in Vorträgen und persönlichen Unterhaltungen erhalten habe. Hierfür möchte ich Herrn Professor H. HOPF und der *Deutschen Forschungsgemeinschaft*, die mir den Studienaufenthalt ermöglicht hat, aufs herzlichste danken.

§ 1. Modifikationen.

Ein Hausdorffscher Raum G heiße eine *komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension* $2n$ mit der *Struktur* $\mathfrak{P}$, wenn gilt:

1. *Jeder Abbildung* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *ist eine offene Menge* U'_α *im Raum* $\mathfrak{R}^{2n}$ *der komplexen Vektoren* $\mathfrak{z}=(z_1, \ldots, z_n)$ *zugeordnet, die durch* $\alpha=\alpha(\mathfrak{z})$ *topologisch auf eine offene Menge* $U_\alpha \subseteq G$ *abgebildet wird.*

2. *Sind zwei Abbildungen* $\alpha \in \mathfrak{P}$ *und* $\beta \in \mathfrak{P}$ *mit* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *gegeben, so ist die vermittelnde Abbildung* $\beta\,{}^{1}\alpha(\mathfrak{z})$ *in* $\alpha\,{}^{1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ *analytisch.*

3. *Es ist* $G=\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{P}} U_\alpha$.

4. *Ist* $\mathfrak{P}^*$ *ein Atlas von* G, *d.h. eine Menge von Abbildungen* α, *die die Forderungen* 1 *bis* 3 *erfüllen, und ist* $\mathfrak{P}^* \supseteq \mathfrak{P}$, *so ist* $\mathfrak{P}^*=\mathfrak{P}$; *d.h.,* $\mathfrak{P}$ *ist ein maximaler Atlas.*

Die offene Menge U_α heiße eine *Karte*; die Abbildung α heiße *uniformisierend* oder ein *örtliches Koordinatensystem*. Ist G ein Hausdorffscher Raum und erfüllt die Menge $\mathfrak{P}_0$ von Abbildungen α die Forderungen 1 bis 3, so gibt es eine und nur eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{P}_0$ als Atlas.

Entgegen dem sonst Üblichen wird hier keine abzählbare Basis der offenen Mengen, oder was dasselbe ist, nicht die Existenz eines abzählbaren Atlases verlangt. Im Falle $n=1$ gibt es immer einen solchen, im Falle $n>1$ aber nicht immer[12]).

Die Teilmenge A der komplexen Mannigfaltigkeit G mit der Struktur $\mathfrak{P}(G)$ werde durch $\tau=\tau(P)$ in die komplexe Mannigfaltigkeit H mit der Struktur $\mathfrak{P}(H)$ abgebildet. In einem Punkt $P \in A$ heiße die Abbildung τ

[12]) Für $n=1$ vgl. man RADÓ [13], für $n>1$ vgl. man das Gegenbeispiel von E. CALABI und M. ROSENLICHT [2]. Davon unabhängig hat auch H. HOPF dieses Beispiel gegeben. Es findet sich in dieser Arbeit im Anschluß an Satz 10.10.

analytisch, wenn es Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ und $\beta \in \mathfrak{P}(H)$ mit $P \in U_\alpha$ und $\tau(P) \in U_\beta$ gibt, für die $\beta^{-1}\tau\alpha(\mathfrak{z})$ im Punkt $\alpha^{-1}(P)$ analytisch ist. Dies gilt dann für alle Paare α, β mit $P \in U_\alpha$ und $\tau(P) \in U_\beta$. Ebenso hängt der Rang der Funktionalmatrix von $\beta^{-1}\tau\alpha(\mathfrak{z})$ in $\alpha^{-1}(P)$ nicht von α und β ab; er heiße der *Rang* von τ in P und werde mit $Rg_P\tau$ bezeichnet. Eine analytische Abbildung τ heiße aus der offenen Menge A in die Teilmenge $M \subseteq G$ (analytisch) fortsetzbar, wenn es eine offene Menge $U \supseteq A \cup M$ mit $U \subseteq G$ und eine analytische Abbildung τ_0 von U in H gibt, für die $\tau_0(P) = \tau(P)$ auf A gilt. Es heiße $\tau_0(P)$ eine Fortsetzung von $\tau(P)$ aus A in M; ist $A \cup M$ ein Gebiet, so ist $\tau_0(P)$ eindeutig bestimmt. Ein Punkt $P_0 \in \bar{A}$ heiße *regulär*, wenn sich τ aus A in P_0 fortsetzen läßt, andernfalls *singulär*[13]).

Eine eineindeutige analytische Abbildung τ der offenen Teilmenge A der $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G in die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H heiße *pseudokonform*. Wie oben definiert man die pseudokonforme Fortsetzung[13]).

Analog kann man auch die Begriffe „analytische Funktion" und „meromorphe Funktion" einführen.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit H der Dimension $2m$, die in der komplexen Mannigfaltigkeit G der Dimension $2n \geqq 2m$ liegt, heiße eine Teilmannigfaltigkeit von G, wenn die identische Abbildung $\iota(P) = P$ von H in G analytisch ist. Gilt dabei $Rg_P\iota = m$, so heiße P ein *gewöhnlicher* Punkt von H. Enthält H nur gewöhnliche Punkte, so heiße H gewöhnliche Mannigfaltigkeit. Jede offene Teilmenge von G ist eine gewöhnliche Teilmannigfaltigkeit von G.

Eine Teilmenge N einer offenen Menge B der komplexen Mannigfaltigkeit G mit der Dimension $2n$ heiße *analytisch*[14]) in B, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ und eine Menge $\mathfrak{F}$ in U analytischer Funktionen gibt, für die

$$N \cap U = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{P \mid f(P) = 0\} \tag{1.1}$$

gilt. Ist eine analytische Menge $N \neq \varnothing$ die Vereinigung $N_1 \cup N_2 = N$ zweier (in B) analytischer Mengen $N_1 \supsetneqq N_2$ und $N_2 \supsetneqq N_1$, so ist N reduzibel, andernfalls irreduzibel. Eine analytische Menge $N \neq \varnothing$ ist die Vereinigung irreduzibler analytischer Mengen $N_\lambda \neq \varnothing$ mit $N_\mu \supsetneqq N_\lambda$ für $\mu \neq \lambda$, von denen in jeden kompakten Teil von B nur endlich viele Teile N_λ eindringen. Diese „irreduziblen Teile" von N sind bis auf die Numerierung eindeutig bestimmt. Der Durchschnitt in B analytischer Mengen N^λ ist in B analytisch; wenn in jeden kompakten Teil von B höchstens endlich viele N^λ eindringen, ist auch die Vereinigung $\bigcup_\lambda N^\lambda$ in B analytisch.

Ein Punkt $P_0 \in N$ heiße ein *gewöhnlicher* Punkt von N, wenn P_0 entweder ein isolierter Punkt von N ist oder wenn es eine offene Umgebung U von P_0

[13]) In dieser Arbeit wird nur die hier geschilderte unmittelbare Fortsetzung gebraucht. Ebenso wird der Begriff des regulären und singulären Punktes nur für Punkte der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A, nicht auch für äußere Punkte von A benötigt.

[14]) Zum Begriff der analytischen Mengen vgl. man Cartan [3], Hermes [5], H. Kneser [10], Remmert und Stein [14].

gibt, so daß $U \cap N$ eine gewöhnliche Teilmannigfaltigkeit von U ist. Mit $\hat{N}$ werde die Menge der gewöhnlichen Punkte von N bezeichnet. Ist N leer oder irreduzibel, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

a) *Es ist N leer; dann sei* $\dim N = -\infty$.

b) *Es besteht N aus einem und nur einem Punkt; dann sei* $\dim N = 0$.

c) *Es ist $\hat{N}$ eine zusammenhängende, gewöhnliche, komplexe Teilmannigfaltigkeit von B, deren Dimension $2k$ sei; dann sei* $\dim N = 2k$.

Zerfällt $N \neq \varnothing$ in die irreduzibeln Teile N_λ, so sei $\dim N = \operatorname{Max}_\lambda \dim N_\lambda$ die Dimension von N und $\dim_P N = \operatorname{Max}_{P \in N_\lambda} \dim N_\lambda$ die Dimension im Punkte $P \in N$. Ist $P \in A - N$, so werde $\dim_P N = -\infty$ gesetzt. Ist $\dim_P N = \dim N$ für alle Punkte $P \in N$, oder, was dasselbe ist, besteht N nur aus irreduzibeln Teilen der gleichen Dimension, so heiße N *rein-dimensional*. Ist N_λ ein irreduzibler Teil von N, so bestehen $N_\lambda \cap \hat{N}$ und $\hat{N}_\lambda$ je entweder aus einem einzigen Punkt oder sind zusammenhängende, gewöhnliche Teilmannigfaltigkeiten von B, für die

$$\overline{N_\lambda \cap \hat{N}} \cap B = \bar{\hat{N}}_\lambda \cap B = N_\lambda, \qquad N_\lambda \cap \hat{N} \subseteqq \hat{N}_\lambda \subseteqq N_\lambda, \tag{1.2}$$

$$\dim N_\lambda \cap \hat{N} = \dim \hat{N}_\lambda = \dim N_\lambda \tag{1.3}$$

gilt. Die Reste $N_\lambda - \hat{N}$ und $N - \hat{N}$ sind analytische Mengen mit

$$\dim_P (N_\lambda - \hat{N}) < \dim_P N_\lambda \quad \text{für} \quad P \in N_\lambda, \tag{1.4}$$

$$\dim_P (N - \hat{N}) < \dim_P N \quad \text{für} \quad P \in N. \tag{1.5}$$

Für $\lambda \neq \mu$ ist $N_\lambda \cap N_\mu$ eine analytische Menge in B mit

$$\dim N_\lambda \cap N_\mu < \operatorname{Min}(\dim N_\lambda, \dim N_\mu), \tag{1.6}$$

$$N_\lambda \cap N_\mu \cap \hat{N} = \varnothing. \tag{1.7}$$

Ist H eine komplexe Teilmannigfaltigkeit von G und C eine offene Teilmenge von G, so ist $H \cap N \cap C$ in $H \cap C$ (bezüglich der Teilmannigfaltigkeit H) analytisch, falls N in G analytisch ist.

Eine analytische Menge N in B heiße in die Teilmenge $M \subseteqq G$ fortsetzbar, wenn es eine offene Menge A mit $B \cup M \subseteqq A \subseteqq G$ und eine in A analytische Menge N_0 mit $A \cap N_0 = N$ gibt. Da der Durchschnitt analytischer Mengen analytisch ist, gibt es bei festem A eine kleinste solche analytische Menge N_0, die eindeutig bestimmt ist und die Fortsetzung von N aus B in A heiße. Ein Punkt $P_0 \in \bar{B}$ heiße *regulär* (bezüglich N), wenn sich N in P_0 fortsetzen läßt, andernfalls *singulär*. Ist $A \supset B$ offen, enthält $A - B$ keinen inneren Punkt und ist jeder Punkt von $A - B$ regulär, so läßt sich N aus B in A fortsetzen.

Eine analytische Menge der reinen Dimension $2n-2$ heiße auch eine *analytische Fläche*. Sie wird lokal als Nullstellenmenge einer Funktion gegeben, d.h. in (1.1) kann man bei geeigneter Wahl von U und $\mathfrak{F}$ mit einer Funktionsmenge $\mathfrak{F}$ auskommen, die nur aus einem Element besteht.

Der Begriff der „*Modifikation*" wird etwas anders als bei BEHNKE und STEIN gefaßt[15]):

Definition 1.1. Modifikation.

Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *liege vor, wenn gilt:*

a) *Komplexe Mannigfaltigkeiten* G *und* H *der Dimension* $2n$ *sind gegeben.*

b) *Die abgeschlossene Teilmenge* M *von* G *habe eine offene Umgebung, die eine* M *umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als* $2n$ *ist*[16]).

c) *Die abgeschlossene Teilmenge* N *von* H *habe eine offene Umgebung, die eine* N *umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als* $2n$ *ist.*

d) *Durch eine Abbildung* $\tau = \tau(P)$ *wird* $A = G - M$ *pseudokonform auf* $B = H - N$ *abgebildet. Die Umkehrabbildung werde durch* $v(Q) = \tau^{-1}(Q)$ *für* $Q \in B$ *gegeben.*

Zwei Modifikationen $\mathfrak{M}_1 = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_1, A_1, M_1, \tau_1 \\ H_1, B_1, N_1, v_1 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{M}_2 = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_2, A_2, M_2, \tau_2 \\ H_2, B_2, N_2, v_2 \end{pmatrix}$ heißen *äquivalent*, in Zeichen $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, wenn es pseudokonforme Abbildungen α von G_1 auf G_2 und β von H_1 auf H_2 mit $\alpha(A_1) = A_2$ und $\beta\,{}^{1}\tau_2\,\alpha(P) = \tau_1(P)$ für $P \in A_1$ gibt. Es gilt dann

$$\alpha(G_1) = G_2, \quad \alpha(A_1) = A_2, \quad \alpha(M_1) = M_2, \tag{1.8}$$

$$\beta(H_1) = H_2, \quad \beta(B_1) = B_2, \quad \beta(N_1) = N_2, \tag{1.9}$$

$$\beta^{-1}\tau_2\alpha(P) = \tau_1(P) \quad \text{für} \quad P \in A_1, \tag{1.10}$$

$$\alpha^{-1}v_2\beta(Q) = v_1(Q) \quad \text{für} \quad Q \in B_1. \tag{1.11}$$

Es ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$; mit $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ gilt auch $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$; aus $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_3$ folgt $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_3$.

Bei einer Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ liegt die Vorstellung zugrunde, daß G zu H abgeändert wird, indem man M durch N ersetzt. Jedoch ist dieser Begriff symmetrisch, so ist mit $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ auch $\mathfrak{M}^{-1} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} H, B, N, v \\ G, A, M, \tau \end{pmatrix}$ eine Modifikation und heiße die zu $\mathfrak{M}$ *inverse Modifikation.*

---

[15]) Bei BEHNKE und STEIN [1] (S. 8) werden die Forderungen b) und c) nicht erhoben, dagegen wird noch verlangt: e) *Ist* $U \supseteq M$ *offen, so hat jeder Punkt* $Q \in N$ *eine offene Umgebung* V *mit* $v(V \cap B) \subseteq U$.

Um noch zu brauchbaren Aussagen zu kommen, scheint es zweckmäßig mittels den Forderungen b) und c) die Mengen M und N „klein" zu halten. Dagegen ist die Forderung e) in wichtigen Fällen, so wenn G und H kompakt sind, von selbst erfüllt. Daher und aus Symmetriegründen wurde sie hier weggelassen. Sind a) bis e) erfüllt, so liegt nach Definition 2.1 und Satz 2.1 eine offene Modifikation vor.

[16]) Die kleinste M umfassende analytische Menge aus G kann dann immer noch die Dimension $2n$ haben.

Ist ι die identische Abbildung von G auf sich und ist $G=A$ sowie M leer, so heiße

$$\mathfrak{J}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, G, \varnothing, \iota\\ G, G, \varnothing, \iota\end{pmatrix}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \iota\\ G, A, M, \iota\end{pmatrix}$$

eine *identische* Modifikation.

Definition 1.2. Streumengen und das Streuen.

Die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G enthalte die offene Menge A, die durch die Abbildung τ analytisch in die $2m$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H abgebildet werde. Es gebe eine offene Umgebung U von $M=G-A$ und eine in U analytische Menge, die M umfaßt, und deren Dimension höchstens $2n-2$ ist.

Ist $L\subseteqq G$ und $R\subseteqq M$, so gehöre der Punkt $Q\in H$ dann und nur dann zur „Streumenge $\Sigma_\tau(R, L)=\Sigma(R, L)$ von τ längs L in R", wenn es eine Punktfolge $P_\nu\in L\cap A$ gibt, für die $Q=\lim\limits_{\nu\to\infty}\tau(P_\nu)$ und $P=\lim\limits_{\nu\to\infty}P_\nu\in R$ ist. Es seien

$$\Sigma(P, L)=\Sigma(\{P\}, L) \quad \text{für} \quad P\in M, \tag{1.12}$$

$$\Sigma(R)=\Sigma(R, G) \quad \text{für} \quad R\subseteqq M, \tag{1.13}$$

$$\Sigma(P)=\Sigma(\{P\}) \quad \text{für} \quad P\in M. \tag{1.14}$$

Enthält $\Sigma(P, L)$ wenigstens zwei verschiedene Punkte, so streue die Abbildung τ längs L im Punkt P; enthält $\Sigma(P, L)$ genau einen Punkt $Q\in H$, so verhalte sich die Abbildung τ längs L im Punkt P bestimmt, andernfalls unbestimmt. Enthält $\Sigma(P, L)$ keinen Punkt, so habe die Abbildung τ längs L im Punkt P eine Lücke. Ist $L=G$, so werde die Ausdrucksweise „längs G" auch weggelassen. Ist R_L die Menge der Punkte von M, in denen sich die Abbildung τ längs L bestimmt verhält, so werde

$$\tau(P, L)=\begin{cases}\tau(P) & \text{für} \quad P\in A,\\ Q & \text{für} \quad P\in R_L \quad \text{mit} \quad Q\in\Sigma(P, L)\end{cases} \tag{1.15}$$

gesetzt und heiße die natürliche Fortsetzung von τ längs L.

Für die Erzeugung einer Modifikation $\underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ durch elementare Modifikationen (Hopfsche σ-Prozesse) wird die Untersuchung der „Streuverhältnisse" der Abbildungen τ und v von Bedeutung sein.

Satz 1.1. Streumengen.

Voraussetzung. *Eine Modifikation $\mathfrak{M}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ sei gegeben. Es seien $L\subseteqq G$ und $R\subseteqq M$.*

Behauptung. 1. *Es ist* $\Sigma(R, L)=\bigcup\limits_{P\in R}\Sigma(P, L)=\bigcup\limits_{P\in R\cap\bar{L}}\Sigma(P, L)$.

2. *Es ist $\Sigma(R, L)\subseteqq N$.*

3. *Ist eine Folge $P_\nu\in A\cap L$ mit $Q=\lim\limits_{\nu\to\infty}\tau(P_\nu)\in\Sigma(R, L)$ und $P=\lim\limits_{\nu\to\infty}P_\nu$ gegeben, so ist P in M enthalten.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition.

2. Angenommen in $\Sigma(R, L) - N$ wäre ein Punkt Q enthalten. Dann gäbe es eine Folge $P_\nu \in A \cap L$, für die $P = \lim_{\nu \to \infty} P_\nu \in M$ und $Q = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P_\nu) \in B = H - N$ gelten würde. Es wäre $v(Q) = \lim_{\nu \to \infty} v\,\tau(P_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} P_\nu = P$ ein Punkt von $A = G - M$, was falsch ist. Damit ist $\Sigma(R, L) \subseteqq N$ bewiesen.

3. Wäre $P \notin M$, so wäre $Q = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P_\nu) = \tau(P) \in B = H - N$, was falsch ist. Daher ist $P \in M$, w. z. b. w.

Satz 1.2. Urbild einer Streumenge.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *und Mengen* $R \subseteqq M$, $L \subseteqq G$ *seien gegeben.*

Behauptung. *Es ist*

$$\Sigma_\tau(R, L) = \{Q \mid R \cap \Sigma_v\big(Q, \tau(L \cap A)\big) \neq \varnothing\}. \tag{1.16}$$

Beweis. a) Ist für einen Punkt $Q \in N$ die Menge $R \cap \Sigma_v\big(Q, \tau(L \cap A)\big)$ nicht leer, so gibt es einen Punkt $P \in R$ und eine Punktfolge $Q_\nu = \tau(P_\nu)$ mit $P_\nu \in L \cap A$, wobei $P_\nu \to P$ und $Q_\nu \to Q$ für $\nu \to \infty$ streben. Also ist $Q \in \Sigma_\tau(R, L)$.

b) Ist $Q \in \Sigma_\tau(R, L)$, so gibt es eine Folge $P_\nu \in L \cap A$ mit $\lim_{\nu \to \infty} P_\nu = P \in R$, wobei $Q_\nu = \tau(P_\nu) \to Q$ für $\nu \to \infty$ strebt. Wegen $Q_\nu \in \tau(L \cap A)$ und $P_\nu = v(Q_\nu)$ ist P in $R \cap \Sigma_v\big(Q, \tau(L \cap A)\big)$ enthalten, diese Menge also nicht leer. Aus a) und b) folgt (1.16), w. z. b. w.

Nach (1.16) ist $\Sigma_\tau(R, L)$ gewissermaßen das Urbild von $\Sigma_v\big(Q, \tau(L \cap A)\big)$.

Auf Teilmannigfaltigkeiten induziert eine Modifikation eine andere, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.3. Modifikationen auf Teilmannigfaltigkeiten.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei gegeben. In einer offenen Menge aus* G *gebe es eine analytische Menge* $L \supseteqq M$, *die kein Teilgebiet der* $2m$*-dimensionalen komplexen Teilmannigfaltigkeit* G_1 *von* G *enthält. In einer offenen Menge aus* H *gebe es eine analytische Menge* $L^* \supseteqq N$, *die kein Teilgebiet der* $2m$*-dimensionalen komplexen Teilmannigfaltigkeit* H_1 *von* H *enthält. Es sei*

$$\tau(G_1 \cap A) = H_1 \cap B. \tag{1.17}$$

Es werde $A_1 = G_1 \cap A$, $M_1 = G_1 \cap M$, $B_1 = H_1 \cap B$, $N_1 = H_1 \cap N$ *gesetzt. Mit* τ_1 *werde die auf* A_1 *beschränkte Abbildung* τ, *mit* v_1 *die auf* B_1 *beschränkte Abbildung* v *bezeichnet.*

Behauptung. *Durch* $\mathfrak{M}_1 = \underset{m}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_1, A_1, M_1, \tau_1 \\ H_1, B_1, N_1, v_1 \end{pmatrix}$ *wird eine Modifikation gegeben.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Modifikation. Aus Satz 1.3 folgt:

Satz 1.4. Modifikationen auf größten Teilgebieten.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei gegeben. Es sei* G_1 *ein größtes Teilgebiet von* G.

Behauptung. *Es gibt ein und nur ein größtes Teilgebiet* $H_1 \geqq \tau(G_1 \cap A)$ *von* H. *Setzt man*[17])

$$A_1 = G_1 \cap A, \quad M_1 = G_1 \cap M, \quad \tau_1 = \tau | A_1, \tag{1.18}$$

$$B_1 = H_1 \cap B, \quad N_1 = H_1 \cap N, \quad v_1 = v | B_1, \tag{1.19}$$

so ist $\mathfrak{M}_1 = \underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G_1, & A_1, & M_1, & \tau_1 \\ H_1, & B_1, & N_1, & v_1 \end{pmatrix}$ *eine Modifikation. Es ist*

$$\Sigma_\tau(R, L) \subseteqq N_1 \quad \text{für} \quad R \subseteqq M_1, \; L \subseteqq G_1. \tag{1.20}$$

Beweis. Mit A_1 ist auch $\tau(A_1)$ zusammenhängend, also Teil eines und nur eines größten Teilgebietes H_1 von H. Es ist $B_1 \geqq \tau(A_1)$, also $v(B_1) \geqq A_1$ und, weil $v(B_1)$ ein Gebiet ist, liegt $v(B_1)$ in $G_1 \cap A = A_1$, woraus $v(B_1) = A_1$ und $\tau(A_1) = B_1$ folgen. Die Teilmannigfaltigkeiten G_1 und H_1 erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.3, also ist $\mathfrak{M}_1$ eine Modifikation. Ist $R \subseteqq M_1$ und $L \subseteqq G_1$, so gibt es zu jedem Punkt $Q \in \Sigma(R, L)$ eine Folge $P_\nu \in L \cap A$, wobei $\tau(P_\nu) \to Q$ und $P_\nu \to P \in R$ für $\nu \to \infty$ streben. Für $\nu \geqq \nu_0$ ist $P_\nu \in L \cap A \cap G_1 = L \cap A_1$, also $\tau(P_\nu) \in H_1$. Es ist $Q \in H_1$, d.h. $\Sigma(R, L) \subseteqq N_1$, w. z. b. w.

Eine Modifikation zwischen G und H setzt sich also aus Modifikationen zwischen den einzelnen größten Teilgebieten von G und H zusammen.

§ 2. Offene Modifikationen.

Unter den Modifikationen kommt eine besondere Bedeutung den „*offenen*" zu:

Definition 2.1. Offene Modifikationen.

Die Modifikation $\underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}$ *heiße offen, wenn für jede offene Menge* $U \supset M$ *auch* $\tau(U \cap A) \cup N$ *offen ist. Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *heiße beiderseits offen, wenn* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}^{-1}$ *offen sind.*

Die Offenheit ist eine gewisse Stetigkeitsbedingung; besteht nämlich M aus einem einzigen Punkt, so ist die Modifikation $\underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}$ dann und nur dann offen, wenn sich v stetig auf N fortsetzen läßt. Einige andere Definitionen der offenen Modifikationen folgen:

Satz 2.1. Offene Modifikationen[15]).

Dann und nur dann ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}$ *offen, wenn es zu jedem Punkt* $Q_0 \in N$ *und jeder Umgebung* U *von* M *eine Umgebung* V *von* Q_0 *mit* $v(V \cap B) \subseteqq U$ *gibt.*

Beweis. a) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei offen, der Punkt $Q_0 \in N$ und die Umgebung U von M seien beliebig gewählt. Dann enthält U eine offene Umgebung U_0 von M; die Menge $\tau(U_0 \cap A) \cup N = V$ ist offen, enthält Q_0 und $v(V \cap B) = U_0 \cap A$ ist in U enthalten, w. z. b. w.

b) Gibt es umgekehrt zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ und jeder Umgebung U von M eine Umgebung V von Q_0 mit $v(V \cap B) \subseteqq U$, so werde eine offene

[17]) Es bedeutet $\tau | A_1$ die auf A_1 beschränkte Abbildung τ.

Menge $U \supset M$ beliebig gewählt und zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ eine Umgebung V_{Q_0} mit $v(V_{Q_0} \cap B) \subseteq U$ bestimmt. Dann ist $V_{Q_0} = (V_{Q_0} - N) \cup N = \tau v(V_{Q_0} \cap B) \cup N \subseteq \tau(U \cap A) \cup N$, weswegen $\tau(U \cap A) \cup N$ offen ist, w. z. b. w.

Um eine dritte Definition der offenen Modifikationen geben zu können, wird noch ein einfacher Satz benötigt.

Satz 2.2. *In der komplexen Mannigfaltigkeit G sei eine offene Menge A und eine Folge $P_\nu \in A$ gegeben. Zu jeder Umgebung U von $M = G - A$ gebe es eine Nummer ν_U, so daß $P_\nu \in A \cap U$ für alle $\nu \geq \nu_U$ ist. Dann hat die Folge P_ν in M wenigstens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Angenommen die Behauptung ist falsch; dann gibt es zu jedem Punkt $P \in M$ eine Umgebung U_P, die keinen Punkt P_ν enthält. Die Vereinigung $U = \bigcup_{P \in M} U_P \supseteq M$ ist eine Umgebung von M und enthält keinen Punkt der Folge entgegen der Voraussetzung. Daher ist die Annahme falsch, w. z. b. w.

Satz 2.3. Offene Modifikationen.

Dann und nur dann ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ offen, wenn für jede konvergente Folge $Q_\nu \in B$ mit $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q \in N$ die Bildfolge $v(Q_\nu) = P_\nu$ in M wenigstens einen Häufungspunkt hat.

Beweis. a) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei offen. Eine offene Umgebung U von M sei beliebig gewählt. Es gibt eine Umgebung V von Q mit $v(V \cap B) \subseteq U$ und eine Nummer ν_U, so daß $Q_\nu \in V \cap B$ also $P_\nu \in U$ für alle $\nu \geq \nu_U$ ist. Nach Satz 2.2 hat die Folge P_ν einen Häufungspunkt in M, w. z. b. w.

b) Für jede konvergente Folge $Q_\nu \in B$ mit $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q \in N$ habe die Bildfolge $v(Q_\nu) = P_\nu$ in M wenigstens einen Häufungspunkt. Eine offene Umgebung U von M sei gewählt. Angenommen $V = \tau(U \cap A) \cup N$ ist nicht offen. Dann gibt es einen Randpunkt $Q \in V$; da $\tau(U \cap A)$ offen ist, gehört Q zu N. Eine Folge $Q_\nu \notin V$ strebt gegen Q; die Bildfolge $\tau(Q_\nu) = P_\nu$ hat einen Häufungspunkt in M. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge gilt $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q$ und $\lim_{\nu \to \infty} P_\nu = P \in M$. Ab einer Nummer ν_U gehören die Punkte P_ν der Umgebung U von P an. Also ist $Q_\nu = \tau v(Q_\nu) = \tau(P_\nu) \in \tau(U \cap A) \subseteq V$ entgegen der Konstruktion der Folge Q_ν. Die Annahme war falsch, w. z. b. w.

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar:

Satz 2.4. *Ist bei der Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ die Ausgangsmannigfaltigkeit G folgenkompakt, so ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen.*

Wie diese beiden Sätze zeigen, ist die Offenheit eine gewisse Kompaktheitsforderung (bezüglich G). So ist eine Modifikation zwischen (folgen-) kompakten Mannigfaltigkeiten G und H beiderseits offen.

Behnke und Stein stellen ein weiteres Kriterium dafür auf, daß eine offene Modifikation vorliegt[18]):

[18]) Man vgl. Behnke und Stein [1] Satz 2, S. 14.

Satz 2.5. Kriterium von BEHNKE und STEIN.

Voraussetzung. a) *Komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ seien gegeben.*

b) *Die abgeschlossene Teilmenge M von G liege in einer offenen Menge $W \subseteq G$, in der es eine analytische Funktion f gibt, die in keinem Teilgebiet von W identisch verschwindet und deren Nullstellenmenge M umfaßt.*

d) *Durch $\tau = \tau(P)$ werde $A = G - M$ pseudokonform auf $B = H - N$ abgebildet. Die Umkehrung werde durch $v(Q) = \tau^{-1}(Q)$ für $Q \in B$ gegeben. In N sei kein größtes Teilgebiet von H enthalten.*

e) *Ist U eine Umgebung von M in G, so gebe es zu jedem Punkt $Q \in N$ eine Umgebung V, für die $v(V \cap B) \subseteq U$ ist.*

Behauptung. *Die Voraussetzung* c) *von Definition* 1.1 *ist erfüllt, d.h.* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *ist eine offene Modifikation.*

Anmerkung. Bei BEHNKE und STEIN wird M kompakt vorausgesetzt. Das ist jedoch nicht erforderlich, was sich fast genau in derselben Weise wie bei BEHNKE und STEIN ergibt:

Beweis. Zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ gibt es eine offene Umgebung V_{Q_0} mit $v(V_{Q_0} - N) \subseteq W$. Dann ist $V_{Q_0} \subseteq \tau(W \cap A) \cup N$. Also ist $V = \tau(W \cap A) \cup N = \tau(W \cap A) \cup \bigcup_{Q_0 \in N} V_{Q_0}$ offen. Auf $V - N$ ist $g(Q) = f(v(Q))$ analytisch. Ist $Q^\nu \in V - N$ und strebt $Q^\nu \to Q_0 \in N$ für $\nu \to \infty$, so strebt $g(Q^\nu) \to 0$ für $\nu \to \infty$. Widrigenfalls würde es eine gleichbezeichnete Teilfolge Q^ν und ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(Q^\nu)| \geq \varepsilon$ geben. Ist U eine beliebige Umgebung von M, so gibt es eine Umgebung V^* von Q_0, so daß $v(V^* \cap B) \subset U$ gilt. Für $\nu \geq \nu_U$ ist $Q^\nu \in V^*$, also $P^\nu = v(Q^\nu) \in U$. Nach Satz 2.2 hat die Folge P^ν einen Häufungspunkt $P_0 \in M$. Für eine geeignete Nummer ν gilt also

$$\varepsilon > |f(P^\nu) - f(P_0)| = |f(P^\nu)| = |f(v(Q^\nu))| = |g(Q^\nu)| \geq \varepsilon.$$

Das ist ein Widerspruch. Es strebt $g(Q^\nu) \to 0$ für $Q^\nu \to Q_0 \in N$ und $Q^\nu \in V \cap B$; nach einem Satz von RADÓ-BEHNKE-STEIN[19]) ist

$$G(Q) = \begin{cases} g(Q) & \text{für } Q \in V \cap B, \\ 0 & \text{für } Q \in N. \end{cases} \tag{2.1}$$

auf V analytisch. Jedes größte Teilgebiet V_1 von V, enthält Punkte von B; denn wäre $V_1 \subseteq N$, so wäre $\overline{V}_1 \subseteq N \subseteq V$ und $V_1 = \overline{V}_1 \cap V = \overline{V}_1$, also wäre V_1 ein größtes Teilgebiet von H und somit nicht in N enthalten. In keinem Teilgebiet von $V_1 \cap B$ verschwindet $G(Q)$ identisch, also ist $G(Q)$ in V_1 nicht identisch Null. Daher hat die in V analytische Menge $L = \{Q \mid G(Q) = 0\}$ höchstens die Dimension $2n - 2$. Es ist $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation, w. z. b. w.

Nun werden einige Eigenschaften der Streumengen bei offenen Modifikationen bewiesen.

[19]) Man vgl. BEHNKE und STEIN [1], RADÓ [13], THULLEN [19], CARTAN [4].

Satz 2.6. Streumengen bei offenen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. In* G *sei die Menge* L *enthalten.*

Behauptung. 1. *Es ist* $\Sigma(M, L) = \Sigma(M \cap \overline{L \cap A}, L) = \overline{\tau(L \cap A)} \cap N$.
2. *Es ist* $\Sigma(M) = N$.

Beweis. 1. Ist $Q \in \Sigma(M, L)$, so gibt es eine Folge $P_\nu \in A \cap L$ mit $Q = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P_\nu)$, woraus sich $Q \in \overline{\tau(A \cap L)} \cap N$ ergibt. Ist $Q \in \overline{\tau(A \cap L)} \cap N$, so gibt es eine Folge $P_\nu \in A \cap L$ mit $Q = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P_\nu)$. Gemäß Satz 2.3 hat die Folge $\{P_\nu\}$ eine konvergente Teilfolge, die wieder mit $\{P_\nu\}$ bezeichnet werde. Es strebt $P_\nu \to P \in M$ für $\nu \to \infty$, also ist $Q \in \Sigma(M, L)$. Man erhält

$$\overline{\tau(A \cap L)} \cap N = \Sigma(M, L) = \Sigma(M \cap \overline{A \cap L}, L). \tag{2.2}$$

2. Es ist

$$\Sigma(M) = \overline{\tau(A)} \cap N = H \cap N = N, \tag{2.3}$$

w. z. b. w.

Satz 2.7. Abgeschlossene Streumengen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die abgeschlossene Menge* $R \subseteq M$ *sei in der offenen Menge* G_1 *enthalten, die eine abzählbare Basis der offenen Mengen habe. Es sei* L *in* G *enthalten.*

Behauptung. *Die Streumenge* $\Sigma(R, L)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis. Da G_1 eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, trägt G_1 eine Metrik $\varrho^*(P, Q)$. Zu jedem Punkt $Q \in \overline{\Sigma(R, L)}$ gibt es eine Folge $Q^\nu \in \Sigma(R, L)$, die gegen Q strebt. Der Punkt Q hat eine metrisierbare Umgebung V, die die Metrik $\varrho(P, K)$ trage. O. B. d. A. kann $Q^\nu \in V$ angenommen werden. Zu jeder Nummer ν gibt es eine Folge $Q^\nu_\mu = \tau(P^\nu_\mu) \in V$ mit $P^\nu_\mu \in L \cap G_1 \cap A$, so daß $Q^\nu_\mu \to Q^\nu$ und $P^\nu_\mu \to P^\nu \in R$ für $\mu \to \infty$ streben. Es gibt eine Nummer μ_ν, so daß $\varrho(Q^\nu_\mu, Q^\nu) \leq \frac{1}{\nu}$ und $\varrho^*(P^\nu_\mu, P^\nu) \leq \frac{1}{\nu}$ für alle $\mu \geq \mu_\nu$ ist. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\varrho(Q^\nu_{\mu_\nu}, Q) \leq \varrho(Q^\nu_{\mu_\nu}, Q^\nu) + \varrho(Q, Q^\nu) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(Q, Q^\nu). \tag{2.4}$$

Daher strebt $Q^\nu_{\mu_\nu} \to Q \in N$ für $\nu \to \infty$. Gemäß Satz 2.3 hat die Folge $Q^\nu_{\mu_\nu} = \tilde{Q}_\nu$ eine Teilfolge $\tilde{Q}_{\nu_\sigma}$, so daß $\tilde{P}_{\nu_\sigma} = v(\tilde{Q}_{\nu_\sigma}) \to P \in M$ für $\sigma \to \infty$ strebt. Mit $\tilde{P}_\nu = v(\tilde{Q}_\nu) = \tilde{P}^\nu_{\mu^\nu}$ erhält man

$$\varrho^*(P^{\nu_\sigma}, P) \leq \varrho^*(P^{\nu_\sigma}, \tilde{P}_{\nu_\sigma}) + \varrho^*(\tilde{P}_{\nu_\sigma}, P) \leq \frac{1}{\nu_\sigma} + \varrho^*(\tilde{P}_{\nu_\sigma}, P). \tag{2.5}$$

Also strebt $P^{\nu_\sigma} \to P$ für $\sigma \to \infty$, wobei $P^{\nu_\sigma} \in R$ ist. Da R abgeschlossen ist, gehört auch P der Menge R an. Damit wurde eine Folge $\tilde{P}_{\nu_\sigma} \in L \cap A$ gefunden, so daß $\tilde{P}_{\nu_\sigma} \to P \in R$ für $\sigma \to \infty$ und $\tau(\tilde{P}_{\nu_\sigma}) = \tilde{Q}_{\nu_\sigma} \to Q$ für $\sigma \to \infty$ streben. Daher ist $Q \in \Sigma(R, L)$ und somit $\Sigma(R, L)$ abgeschlossen, w. z. b. w.

Normalerweise setzt man bei Mannigfaltigkeiten die Existenz einer abzählbaren Basis der offenen Mengen voraus. In diesem Normalfall ist die Streumenge von τ längs L in R abgeschlossen, falls nur R abgeschlossen und die Modifikation offen ist.

Auf einer Teilmannigfaltigkeit induziert eine offene Modifikation eine andere offene Modifikation:

Satz 2.8. Modifikation auf Teilmannigfaltigkeiten.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Eine* $2m$*-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit* G_1 *von* G *und eine* $2m$*-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit* $H_1 \subseteqq H$ *seien gegeben. In einer offenen Umgebung* U *von* M *gebe es eine analytische Menge* $L \supseteqq M$*, die kein Teilgebiet von* $G_1 \cap U$ *enthält. In einer offenen Umgebung* V *von* N *gebe es eine analytische Menge* $L^* \supseteqq N$*, die kein Teilgebiet von* $H_1 \cap V$ *enthält. Es sei*

$$\tau(G_1 \cap A) = H_1 \cap B, \tag{2.6}$$

$$\overline{G}_1 \cap M = G_1 \cap M. \tag{2.7}$$

Es werde $A_1 = G_1 \cap A$, $M_1 = G_1 \cap M$, $B_1 = H_1 \cap B$ *und* $N_1 = H_1 \cap N$ *gesetzt. Mit* τ_1 *werde die auf* A_1 *beschränkte Abbildung* τ*, mit* v_1 *die auf* B_1 *beschränkte Abbildung* v *bezeichnet.*

Behauptung. *Durch* $\mathfrak{M}_1 = \underset{m}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_1, A_1, M_1, \tau_1 \\ H_1, B_1, N_1, v_1 \end{pmatrix}$ *wird eine offene Modifikation gegeben.*

Beweis. Nach Satz 1.4 ist $\mathfrak{M}_1$ eine Modifikation. Strebt $Q_\nu \to Q \in N_1$ für $\nu \to \infty$ und ist $Q_\nu \in B_1$, so strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $P_\nu = v(Q_\nu) \to P \in M$ für $\nu \to \infty$. Da $P_\nu \in G_1 \cap A$ ist, gehört P zu $\overline{G}_1 \cap M = G_1 \cap M$. Also ist die Modifikation $\mathfrak{M}_1$ offen, w. z. b. w.

In der Definition 1.2 wurde die Abbildung $\tau(P, L)$ erklärt. Damit ist auch die Abbildung $v(Q, L)$ definiert, über deren Verhalten bei einer offenen Modifikation der folgende Satz Aufschluß gibt.

Satz 2.9. Stetigkeit in den Bestimmtheitsstellen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Es sei* $R_L \subseteqq N$ *die Menge der Punkte* $Q \in \overline{L \cap B} \cap N$*, in denen die Abbildung* v *längs* L *nicht streut. Es sei* $R_H \subseteqq N$ *die Menge der Punkte* $Q \in N$*, in denen die Abbildung* v *nicht streut.*

Behauptung. 1. *Die Abbildung* $v(Q, L)$ *ist auf* $(L \cap B) \cup R_L$ *stetig.*

2. *Die Menge* $B \cup R_H$ *ist offen und die Abbildung* $v(Q, H)$ *auf* $B \cup R_H$ *analytisch.*

Beweis. a) Ist $Q_0 \in B \cap L$, so gilt $v(Q, L) = v(Q)$ in einer Umgebung von Q_0, also ist $v(Q, L)$ in Q_0 stetig.

b) Ist $Q_0 \in R_L$, so gibt es eine Folge $Q^\nu \in L \cap B$, die gegen Q_0 strebt. In M hat die Folge $v(Q^\nu)$ einen Häufungspunkt, der dann zur Streumenge $\Sigma(Q_0, L)$ gehört. Also besteht $\Sigma(Q_0, L)$ für $Q_0 \in R_L$ aus genau einem — mit

$v(Q_0, L)$ bezeichneten — Element. Ist $Q^\nu \in L \cap B$ irgendeine Folge mit $\lim_{\nu\to\infty} Q^\nu = Q_0$, so hat die Bildfolge $v(Q^\nu)$ wenigstens einen Häufungspunkt, und jeder solche Häufungspunkt gehört zu $\Sigma(Q_0, L)$. Daher strebt $v(Q^\nu) \to v(Q_0, L)$ für $\nu \to \infty$. Es ist $v(Q, L)$ in Q_0 bei Annäherung aus $L \cap B$ stetig.

c) Angenommen die Abbildung $v(Q, L)$ ist in $Q_0 \in R_L$ bei Annäherung aus R_L unstetig. Dann gibt es eine kompakte Umgebung U von $v(Q_0, L)$ und eine Folge $Q^\nu \in R_L$, die gegen Q_0 strebt und für die $P^\nu = v(Q^\nu, L) \notin U$ ist. Dabei kann man annehmen, daß die Punkte Q^ν in einer offenen Umgebung V von Q_0 liegen, die eine Metrik $\varrho(P, Q)$ trägt. Zu jeder Nummer ν kann man einen Punkt $\tilde{P}^\nu = v(\tilde{Q}^\nu) \notin U$ mit $\tilde{Q}^\nu \in V \cap B \cap L$ bestimmen, für den $\varrho(\tilde{Q}^\nu, Q^\nu) \leq \frac{1}{\nu}$ gilt. Wegen $\varrho(\tilde{Q}^\nu, Q_0) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(Q^\nu, Q_0)$ strebt $\tilde{Q}^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$. Es strebt die Folge $\tilde{P}^\nu = v(\tilde{Q}^\nu) = v(\tilde{Q}^\nu, L)$ gegen $v(Q_0, L)$ für $\nu \to \infty$. Daher ist $\tilde{P}^\nu \in U$ für $\nu \geq \nu_0$, was falsch ist. Die Abbildung $v(Q, L)$ ist auf R_L stetig. Aus b) und c) folgt die Stetigkeit von $v(Q, L)$ auf $(L \cap B) \cup R_L$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

d) Die Abbildung $v(Q, H)$ ist auf $B \cup R_H$ stetig. Zu jedem Punkt $Q_0 \in R_H$ gibt es eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$, eine kompakte Umgebung $U \subset U_\alpha$ von $P_0 = v(Q_0, H)$ und eine offene Umgebung V von Q_0, für die $v(V - N) \subset U$ gilt. In $V - N$ gibt es analytische Funktionen $f_1, \ldots, f_n$, für die

$$\alpha^{-1} v(Q) = \big(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)\big) \in \alpha^{-1}(U) \tag{2.8}$$

auf $V - N$ gilt. Da $\alpha^{-1}(U)$ kompakt ist, sind die Funktionen $f_1(Q), \ldots, f_n(Q)$ beschränkt, lassen sich also eindeutig und analytisch in $V \cap N$ fortsetzen. Für $Q_1 \in V \cap N$ ist

$$\big(f_1(Q_1), \ldots, f_n(Q_1)\big) = \lim_{\substack{Q \to Q_1 \\ Q \in B}} \alpha^{-1} v(Q) \in \alpha^{-1}(U). \tag{2.9}$$

Der Grenzwert $\lim_{\substack{Q \to Q_1 \\ Q \in B}} v(Q) = \alpha\left(\lim_{\substack{Q \to Q_1 \\ Q \in B}} \alpha^{-1} v(Q)\right) \in U$ existiert, also ist $Q_1 \in R_H$. Daher ist $B \cup R_H$ offen und

$$v(Q, H) = \alpha\big(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)\big) \quad \text{für} \quad Q \in V \tag{2.10}$$

analytisch. Die Abbildung $v(Q)$ ist aus B in die offene Menge $B \cup R_H$ eindeutig und analytisch fortsetzbar, w. z. b. w.

Nun soll noch das Verhalten analytischer und meromorpher Funktionen bei Modifikationen untersucht werden.

Satz 2.10. Analytische Funktionen[20]).

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die Funktion* $f(P)$ *sei in einer offenen Umgebung* U *von* M *analytisch. Es werde* $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ *für* $Q \in \tau(U \cap A)$ *gesetzt.*

[20]) Man vgl. Behnke und Stein [1] S. 15.

Behauptung. *Die analytische Funktion $g(Q)$ ist aus $\tau(U \cap A)$ eindeutig und analytisch in die offene Menge $V = \tau(U \cap A) \cup N$ fortsetzbar.*

Beweis. Angenommen die Funktion $g(Q)$ ist in einem Punkt $Q_0 \in N$ singulär, so ist sie in keiner Umgebung von Q_0 beschränkt. Es gibt eine Folge $Q^\nu \in V \cap B$ mit $\lim_{\nu\to\infty} Q^\nu = Q_0$, so daß $g(Q^\nu) \to \infty$ für $\nu \to \infty$ strebt. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $P^\nu = v(Q^\nu) \to P_0 \in M$ für $\nu \to \infty$. Also ist $\lim_{\nu\to\infty} f(P^\nu) = \infty$, was falsch ist. Daher ist $g(Q)$ in allen Punkten von N regulär, w. z. b. w.

Satz 2.11. Meromorphe Funktionen[20]).

Voraussetzung. *Die Modifikation $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei offen. Die Funktion $f(P)$ sei in einer offenen Umgebung U von M meromorph. Für $Q \in \tau(A \cap U)$ werde $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ gesetzt. Außerdem sei eine der beiden folgenden Forderungen erfüllt:*

a) *Die Funktion $f(P)$ lasse auf M einen Wert aus und habe auf M keine Unbestimmtheitsstelle.*

b) *In einer offenen Menge U_1 mit $M \subset U_1 \subseteqq U$ gebe es zwei analytische Funktionen $f_1(P)$ und $f_2(P)$, deren Quotient f sei.*

Behauptung. *Die Funktion $g(Q)$ läßt sich aus $\tau(A \cap U)$ eindeutig und meromorph in die offene Menge $V = \tau(A \cap U) \cup N$ fortsetzen.*

Beweis. 1. Die Voraussetzung a) gelte. Läßt $f(P)$ den Wert ∞ aus, so ist $g(Q)$ nach Satz 2.10 in N regulär, ist $f(P) \neq a \neq \infty$ für alle $P \in M$, so ist $f^*(P) = \frac{1}{f(P) - a}$ in einer Umgebung von M analytisch, also $g^*(Q) = \frac{1}{f(v(Q)) - a}$ $= \frac{1}{g(Q) - a}$ in V regulär. Daher läßt sich $g(Q)$ eindeutig und meromorph aus $\tau(U \cap A)$ in V fortsetzen, w. z. b. w.

2. Gilt die Voraussetzung b), so sind die Funktionen $g_1(Q) = f_1\big(v(Q)\big)$ und $g_2(Q) = f_2\big(v(Q)\big)$ in V regulär. Daher ist $g(Q)$ aus $\tau(U \cap A)$ eindeutig und meromorph in V fortsetzbar, w. z. b. w.

Gegenbeispiele.

Im komplex-projektiven Raum G der Dimension 4 werden homogene Koordinaten $x:y:z$ und im komplex-projektiven Raum H der Dimension 4 werden homogene Koordinaten $\xi:\eta:\zeta$ eingeführt. Werden

$$(2.11)\quad \begin{cases} A = \{(x:y:z) \mid y \neq 0\}, & B = \{(\xi:\eta:\zeta) \mid \eta \neq 0\}, \\ M = G - A, & N = H - B, \\ \tau(x:y:z) = \big((x + z\,e^{z/y}):y:z\big), & v(\xi:\eta:\zeta) = \big((\xi - \zeta\,e^{\zeta/\eta}):\eta:\zeta\big) \end{cases}$$

gesetzt, so ist $\mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine beiderseits offene Modifikation.

1. Die Funktion $f(P) = x/y$ ist in A analytisch, in G meromorph, läßt in M alle Werte außer ∞ aus, hat aber in M die Unbestimmtheitsstelle $(0:0:1)$. Die Funktion $g(Q) = f\big(v(Q)\big) = \frac{\xi - \zeta\,e^{\zeta/\eta}}{\eta}$ ist in N wesentlich singulär.

2. Die Funktion $f(P)=\frac{x}{z}$ ist in M meromorph, hat in M keine Unbestimmtheitsstelle, nimmt aber jeden Wert in M an. Die Funktion $g(Q)=f(v(Q))=\frac{\xi-\zeta e^{\zeta/\eta}}{\zeta}$ ist in N wesentlich singulär.

Diese Beispiele zeigen, daß auch bei offenen Modifikationen wesentliche Singularitäten entstehen können, selbst dann, wenn G und H kompakt sind.

Satz 2.12. Analytische Mengen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ *sei offen. In einer offenen Umgebung* U *von* M *liege eine analytische Menge* L, *die* M *in höchstens endlich vielen Punkten treffe. In jedem Punkt von* M *streue die Abbildung* τ *längs* L *nicht.*

Behauptung. *Die in* $\tau(U\smallsetminus A)$ *analytische Menge* $L^*=\tau(L\smallsetminus A)$ *ist in der offenen Umgebung* $V=\tau(U\smallsetminus A)\cup N$ *regulär und wird durch* $\tilde{L}=\tau(L,L)=V\cap\overline{\tau(L\cup A)}$ *in* V *fortgesetzt.*

Beweis. In U ist $L_1=\{P\,|\,\dim_P L>0\}$ analytisch und trifft M in höchstens endlich vielen Punkten, in denen τ längs L_1 nicht streut. In $V\cap B$ ist $L_1^*=\tau(L_1\smallsetminus A)$ analytisch. Da L_1 in U abgeschlossen ist, erhält man

$$\Sigma(M,L_1)=\bigcup_{P\in M}\Sigma(P,L_1)=\bigcup_{P\in M\cap L_1}\Sigma(P,L_1). \tag{2.12}$$

Weil $M\cap L_1$ höchstens endlich viele Punkte und $\Sigma(P,L_1)$ höchstens einen Punkt enthält, besteht auch

$$\Sigma(M,L_1)=\overline{\tau(L_1\smallsetminus A)}\cap N=\overline{L_1^*}\cap N \tag{2.13}$$

(Satz 2.6) aus höchstens endlich vielen Punkten. In V ist L_1^* bis auf endlich viele Punkte regulär. Weil $\dim_Q L_1^*\geqq 2$ für $Q\in\tilde{L}_1$ ist, verhält sich nach Remmert und Stein [14] $\tilde{L}_1$ in ganz V regulär.

In U ist $L_0=\{P\,|\,\dim_P L=0\}$ regulär. Angenommen $L_0^*=\tau(L_0\smallsetminus A)$ ist in $Q_0\in V$ singulär. Dann ist $Q_0\in N$ und es gibt eine Folge $Q^\nu\in L_0^*\cap B$ mit $Q_0=\lim_{\nu\to\infty}Q^\nu$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $P^\nu=v(Q^\nu)\to P_0\in M$ für $\nu\to\infty$; denn die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist offen. Da $P^\nu\in L_0$ ist, wird L_0 in P_0 singulär, was falsch ist. In V ist L_0^* regulär. Dann ist auch $L_0^*\cup L_1^*=L^*$ in V regulär. Die Menge der Punkte aus $L\cap M$, in denen sich τ längs L bestimmt verhält, sei M_1. Die Fortsetzung von L^* aus $V\cap B$ in V ist dann:

$$\begin{aligned}\tilde{L}=\overline{L^*}\cap V&=\tau(L\smallsetminus A)\cup[\overline{\tau(L\smallsetminus A)}\cap N]\\&=\tau(L\smallsetminus A)\cup\Sigma(M,L)\\&=\tau(L\smallsetminus A)\cup\bigcup_{P\in L\cap M}\Sigma(P,L)\\&=\tau(L\smallsetminus A)\cup\bigcup_{P\in M_1}\Sigma(P,L)\\&=\tau(L\smallsetminus A)\cup\bigcup_{P\in M_1}\{\tau(P,L)\}\\&=\tau(L\smallsetminus A)\cup\tau(M\cap L,L)\\&=\tau(L,L),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

§ 3. Das Verhalten analytischer Mengen bei Modifikationen.

Für die weitere Untersuchung wird es von Bedeutung sein, daß man die Modifikationen zwischen zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten leicht übersieht und daß man bei Modifikationen zwischen $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten das Verhalten zweidimensionaler komplexer Teilmannigfaltigkeiten, sowie analytischer Mengen der Dimension 2 leicht beherrscht. Auf das Verhalten höherdimensionaler analytischer Mengen bei Modifikationen soll nicht weiter eingegangen werden, da diese weiterhin nicht gebraucht werden.

Eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit werde auch als Riemannsche Fläche und eine zweidimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit der komplexen Mannigfaltigkeit G als eine *komplexe Kurve* aus G, oder, wenn keine Verwechslung möglich ist, als Kurve bezeichnet.

Satz 3.1. Offene Modifikationen Riemannscher Flächen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

Behauptung. *Die Abbildung v ist in H regulär. Die Abbildung $v(Q, H)$ bildet H konform auf $H^* = v(H, H)$ ab. In jedem Punkt $P \in G - H^*$, hat die Abbildung τ eine Lücke.*

Beweis. Die Menge M besteht aus isolierten Punkten. Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es also ein Gebiet U_P, so daß $\overline{U}_P \frown \overline{U}_Q$ für $P \neq Q$ leer ist, und so daß $\overline{U}_P$ kompakt ist. Es ist $U = \bigcup_{P \in M} U_P$ eine offene Umgebung von M, deren größte Teilgebiete die Gebiete U_P sind. Jeder Punkt $Q \in N$ liegt in einem Gebiet V, für das $v(V \frown B) \subseteq U$ gilt. Da $v(V \frown B)$ ein Gebiet ist, gibt es einen und nur einen Punkt $P \in M$ mit $v(V \frown B) \subseteq U_P$; also besteht $\Sigma_v(Q)$ genau aus dem Punkt P. Die Abbildung v verhält sich in N bestimmt, ist also aus B eindeutig und analytisch in H fortsetzbar. Da $v(Q, H)$ auf H analytisch, auf B konform ist und $N = H - B$ nur aus isolierten Punkten besteht, bildet $v(Q, H)$ die Mannigfaltigkeit H konform auf eine offene Menge $H^* = v(H, H)$ ab. Es ist $G \supseteq H^* \supseteq A$. Ist $P \in G - H^*$ und wird $\Sigma_\tau(P) \neq \varnothing$ angenommen, so gibt es eine Folge $Q^\nu \in B$, die für $\nu \to \infty$ gegen einen Punkt $Q \in \Sigma_\tau(P)$ strebt, wobei $\lim_{\nu \to \infty} v(Q^\nu) = P$ ist; es gilt $P = v(Q, H) \in H^*$, also war die Annahme falsch. In jedem Punkt $P \in G - H^*$ hat die Abbildung τ eine Lücke, w. z. b. w.

Offene Modifikationen zwischen Riemannschen Flächen sind also nur in der trivialen Weise möglich, daß aus M gewisse Punkte weggelassen werden. Hat die Abbildung τ keine Lücke, wie insbesondere bei beiderseits offenen Modifikationen, so ist die offene Modifikation $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ äquivalent zur trivialen Modifikation $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, j \\ G, A, M, j \end{pmatrix}$, wenn dabei j die identische Abbildung von G auf sich bedeutet, oder anders ausgedrückt, G und H sind analytisch äquivalente Mannigfaltigkeiten, wobei sich die Mengen A und B entsprechen und die Abbildungen τ bzw. v äquivalente Punkte ineinander überführen.

Satz 3.2. Voraussetzung. a) *Riemannsche Flächen G und H seien gegeben.*

b) *Die Menge $M \subset G$ bestehe nur aus isolierten Punkten.*

d) *Durch $\tau(P)$ werde $A = G - M$ konform auf die offene Menge $B \subsetneqq H$ abgebildet. Für $Q \in B$ sei $v(Q) = \tau^{-1}(Q)$ die Umkehrung. In $N = H - B$ sei kein größtes Teilgebiet von H gelegen.*

e) *Zu jedem Punkt $Q \in N$ und jeder Umgebung U von M gebe es eine Umgebung V von Q, so daß $v(V \cap B) \subseteq U$ ist.*

Behauptung. *Es ist* $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *eine offene Modifikation.*

Beweis. Da M nur isolierte Punkte enthält, hat jeder Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung U_P mit $U_P \cap U_Q = \emptyset$ für $P \neq Q$, auf der es eine analytische Funktion f_P gibt, die auf $U_P \cap M = \{P\}$ und nur dort Null wird. In der offenen Menge $W = \bigcup_{P \in M} U_P \supset M$ gibt es eine und nur eine analytische Funktion f mit $f = f_P$ auf U_P. Es ist $M = \{P \mid f(P) = 0\}$. Nach dem Satz von Behnke und Stein (Satz 2.5) ist $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation, w. z. b. w.

Damit ist eine vollständige Übersicht über die Modifikationen zwischen zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten gewonnen.

Bekanntlich gilt der folgende Satz:

Satz 3.3. Satz von Cartan[21]).

Voraussetzung. *In der $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G sei die rein zweidimensionale analytische Menge L gelegen.*

Behauptung. 1. *Es gibt eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{L}$ und eine analytische Abbildung $\gamma(Q)$ von $\mathfrak{L}$ auf L, für die gilt:*

a) *Ist V eine komplexe Kurve aus G, die in L liegt, so gibt es eine und nur eine offene Menge $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{L}$, so daß die auf $\mathfrak{V}$ beschränkte Abbildung $\gamma_{\mathfrak{V}}(Q) = \gamma(Q) \mid \mathfrak{V}$ die offene Menge $\mathfrak{V}$ konform auf V abbildet.*

b) *Zu jedem Punkt $Q_0 \in \mathfrak{L}$ gibt es eine offene Umgebung $\mathfrak{V}$, die durch γ konform auf eine komplexe Kurve V aus G mit $V \subseteq L$ abgebildet wird.*

2. *Die Riemannsche Fläche $\mathfrak{L}$ und die Abbildung γ sind bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmt, d.h.: Ist $\mathfrak{L}^*$ eine Riemannsche Fläche und γ^* eine analytische Abbildung von $\mathfrak{L}^*$ auf L, die die Forderungen* a) *und* b) *erfüllen, so gibt es eine konforme Abbildung ϱ von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{L}^*$, für die gilt:*

c) *Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subseteq L$, ist $\mathfrak{V}$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{V}^*$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}^*$, so wird $\mathfrak{V}$ durch ϱ konform auf $\mathfrak{V}^*$ abgebildet. Es gilt $\varrho = \gamma_{\mathfrak{V}^*}^{*-1} \gamma_{\mathfrak{V}}$.*

3. *Zu jedem Punkt $P \in L$ gibt es eine Zahl s_P und eine offene Umgebung U, so daß $U \in L$ aus s_P zusammenhängenden komplexen Kurven besteht, die sich paarweise in P und nur in P schneiden. In jedem gewöhnlichen Punkt P ist $s_P = 1$. Die Menge $\gamma^{-1}(P)$ besteht aus genau s_P Punkten.*

[21]) Man vgl. H. Cartan [3].

4. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{L}_0$ ein größtes Teilgebiet von $\mathfrak{L}$, wenn $\gamma(\mathfrak{L}_0)$ ein irreduzibler Teil von L ist.*

Auf den Beweis dieses bekannten Satzes möge hier verzichtet werden. Es werde $\mathfrak{L}$ die Riemannsche Fläche zur analytischen Menge L und $\gamma(R)$ die Projektion von $\mathfrak{L}$ auf L genannt.

Satz 3.4. Verhalten zweidimensionaler analytischer Mengen.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei offen.*

2. *Die rein zweidimensionale analytische Menge L aus G schneide die Menge M nur in isolierten Punkten. Die Riemannsche Fläche zu L sei $\mathfrak{L}$ und $\gamma(R)$ die zugehörige Projektion.*

3. *Es gebe eine zweidimensionale analytische Menge $\tilde{L}$ aus H mit $\tilde{L} \geqq \tau(L \frown A)$ und zwar sei $\tilde{L}$ die kleinste solche Menge.*

Behauptung. 1. *Die analytische Menge $\tilde{L}$ ist rein zweidimensional. Die Riemannsche Fläche zu $\tilde{L}$ sei $\tilde{\mathfrak{L}}$ und $\tilde{\gamma}(R)$ die zugehörige Projektion. Es gibt eine konforme Abbildung ϱ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ in $\mathfrak{L}$, so daß in jedem Punkt $Q \in B \frown \tilde{L}$ gilt:*

$$\gamma\varrho(R) = v(Q) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\gamma}^{-1}(Q). \tag{3.1}$$

Die Abbildung ϱ ist eindeutig bestimmt.

2. *Ist $R \in \mathfrak{L} - \varrho(\tilde{\mathfrak{L}})$, so ist $\gamma(R) \in M$ und es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{V}$ von R, die konform auf eine komplexe Kurve V aus G durch γ abgebildet wird, so daß $\Sigma_\tau(\gamma(R), V)$ leer ist.*

3. *Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subsetneqq L$, ist $\mathfrak{V} \subsetneqq \mathfrak{L}$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}$ und $\gamma_{\mathfrak{V}}$ die konforme Beschränkung von γ auf $\mathfrak{V}$, so wird die komplexe Kurve V durch $\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ konform in $\mathfrak{L}$ abgebildet, falls in jedem Punkt $P \in V \frown M$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P, V)$ nicht leer ist.*

4. *Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subsetneqq L$, für die $\overline{V} \frown M = V \frown M$ gilt und diese Menge aus dem Punkt P_0 besteht, und für die $\Sigma(P_0, V) \neq \emptyset$ ist, so verhält sich die Abbildung τ längs V im Punkt P_0 bestimmt. Durch $\tau(P, V)$ wird V konform auf eine komplexe Kurve $\tilde{V}$ aus H mit $\tilde{V} \subsetneqq \tilde{L}$ abgebildet. Ist $Q_0 = \tau(P_0, V)$, so gilt*

$$\overline{\tilde{V}} \frown N = V \frown N = \{Q_0\}. \tag{3.2}$$

Ist dabei P_0 ein gewöhnlicher Punkt von V, und streut die Abbildung $v(Q)$ in Q_0 nicht, so ist auch Q_0 ein gewöhnlicher Punkt.

5. *Es ist $\tilde{L} = \overline{\tau(L \frown A)}$. Die analytische Menge $\tilde{L}$ schneidet N nur in isolierten Punkten.*

Beweis. 1. Die Menge $\hat{L}$ der gewöhnlichen Punkte von L ist eine komplexe Kurve aus G ebenso der Durchschnitt $\hat{L} \frown A$. Die zugehörige offene Menge $\mathfrak{A} \subsetneqq \mathfrak{L}$ wird durch $\gamma_{\mathfrak{A}} = \gamma | \mathfrak{A}$ konform auf $\hat{L} \frown A$ abgebildet. Da $\tilde{L}$ minimal gewählt ist, ist $\tilde{L}$ rein zweidimensional. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\tilde{L}$ sei $\hat{\tilde{L}}$; die Riemannsche Fläche zu $\tilde{L}$ sei $\tilde{\mathfrak{L}}$ und $\tilde{\gamma}$ die zugehörige

Projektion. Durch τ wird $\hat{L} \cap A$ konform auf $\tilde{A} \subseteqq \hat{\tilde{L}} \cap B$ abgebildet. Der komplexen Kurve $\tilde{A}$ aus H entspreche in $\tilde{\mathfrak{L}}$ die offene Menge $\tilde{\mathfrak{A}}$, die durch $\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \tilde{\gamma} | \tilde{\mathfrak{A}}$ konform auf $\tilde{A}$ abgebildet wird. Durch $\varphi(R) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1} \tau \gamma_{\mathfrak{A}}(R)$ wird $\mathfrak{A}$ konform auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ abgebildet. Die Umkehrung wird durch $\psi(R) = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} v \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(R)$ für $R \in \tilde{\mathfrak{A}}$ gegeben.

Die Menge $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} - \mathfrak{A}$ besteht nur aus isolierten Punkten, da $L - (\hat{L} \cap A)$ nur aus isolierten Punkten besteht. Angenommen in $\tilde{\mathfrak{N}} = \tilde{\mathfrak{L}} - \tilde{\mathfrak{A}}$ ist ein größtes Teilgebiet $\mathfrak{C}$ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ enthalten, so ist $C = \tilde{\gamma}(\mathfrak{C})$ ein irreduzibler Teil von $\tilde{L}$. Da die analytische Menge $\tilde{L} \supseteqq \tau(L \cap A)$ minimal gewählt war, gibt es eine komplexe Kurve $V \subseteqq C \cap \tau(L \cap A)$, die nur gewöhnliche Punkte von C und $\tau(L \cap A)$ enthält. Daher gehört V zu $\tilde{A} = \tau(\hat{L} \cap A)$, woraus $\tilde{\gamma}_{\mathfrak{C}}^{-1}(V) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1}(V) \subseteqq \mathfrak{C} \cap \tilde{\mathfrak{A}}$ folgt. Wegen $\mathfrak{C} \subseteqq \tilde{\mathfrak{N}}$ und $\tilde{\mathfrak{N}} \cap \tilde{\mathfrak{A}} = \varnothing$ ist das ein Widerspruch. In $\tilde{\mathfrak{N}}$ liegt kein größtes Teilgebiet von $\tilde{\mathfrak{L}}$.

Der Punkt $Q_0 \in \tilde{\mathfrak{N}}$ und die Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{N}$ seien beliebig gewählt. Angenommen für jede Umgebung $\mathfrak{V}$ von Q_0 sei $\psi(\mathfrak{V} \cap \tilde{\mathfrak{A}})$ nicht in $\mathfrak{U}$ enthalten. Dann gibt es eine Folge $Q^\nu \in \tilde{\mathfrak{A}}$ mit $\lim_{\nu \to \infty} Q^\nu = Q_0$, für die $\psi(Q^\nu) = P^\nu \notin \mathfrak{U}$ ist. Da die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen ist, kann man aus der Folge $\tilde{\gamma}(Q^\nu) \in \hat{\tilde{L}} \cap B$ eine gleichbezeichnete Teilfolge auswählen, so daß $v \tilde{\gamma}(Q^\nu) \to P_0 \in L$ strebt. Es gehört $v \tilde{\gamma}(Q^\nu)$ der Menge $\hat{L} \cap A$ an. Nach Satz 3.3 Behauptung 3 strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $\gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} v \tilde{\gamma}(Q^\nu) = \psi(Q^\nu) \to R_0 \in \mathfrak{L}$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in \mathfrak{A}$, so ist $Q_0 = \lim_{\nu \to \infty} Q^\nu = \lim_{\nu \to \infty} \varphi \psi(Q^\nu) = \varphi(R_0) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ was falsch ist. Ist $R_0 \in \mathfrak{N}$, so ist $P^\nu = \psi(Q^\nu) \in \mathfrak{U}$ für alle hinreichend großen Nummern ν, was ebenfalls falsch ist. Daher gibt es zu jedem Punkt $Q_0 \in \tilde{\mathfrak{N}}$ und jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{N}$ eine Umgebung $\mathfrak{V}$ von Q_0, für die $\psi(\mathfrak{V} \cap \tilde{\mathfrak{A}}) \subseteqq \mathfrak{U}$ ist.

Gemäß Satz 3.2 ist $\mathfrak{M}_1 \begin{pmatrix} \mathfrak{L}, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}, \varphi \\ \tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{N}}, \psi \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation. Die Abbildung $\psi = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} v \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ läßt sich also zu einer konformen Abbildung ϱ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ in $\mathfrak{L}$ fortsetzen. Es ist $\gamma \varrho$ auf $\tilde{\mathfrak{L}}$ stetig. Auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist $\gamma \varrho(R) = v \tilde{\gamma}(R)$, dies gilt dann auch noch, wenn $R \in \overline{\tilde{\mathfrak{A}}} \cap \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B) = \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B)$ ist. Daher gilt

$$\gamma \varrho(R) = v(Q) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\gamma}^{-1}(Q), \tag{3.3}$$

falls $Q \in \tilde{L} \cap B$ ist. Ist $\varrho^*(R)$ eine konforme Abbildung von $\tilde{\mathfrak{L}}$ in $\mathfrak{L}$, so daß

$$\gamma \varrho^*(R) = v(Q) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\gamma}^{-1}(Q) \quad \text{mit} \quad Q \in \tilde{L} \cap B \tag{3.4}$$

gilt, so ist $\gamma \varrho(R) = \gamma \varrho^*(R)$ für $R \in \tilde{\mathfrak{A}}$. Wegen $\gamma \varrho(R) \in \mathfrak{A}$ für $R \in \tilde{\mathfrak{A}}$ gilt

$$\varrho(R) = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} \gamma \varrho(R) = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} \gamma \varrho^*(R) = \varrho^*(R) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\mathfrak{A}}. \tag{3.5}$$

Daher ist $\varrho(R) = \varrho^*(R)$ für $R \in \overline{\tilde{\mathfrak{A}}} = \tilde{\mathfrak{L}}$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

2. Der Punkt $R_0 \in \mathfrak{L} - \varrho(\tilde{\mathfrak{L}})$ sei beliebig gewählt. Dann ist $\Sigma_\varphi(R_0) = \varnothing$ gemäß Satz 3.1. Es ist

$$\gamma \varrho(\tilde{\mathfrak{L}}) \supseteqq \gamma \varrho \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B) = v(\tilde{L} \cap B) \supseteqq L \cap A. \tag{3.6}$$

Daher ist $\gamma(R_0) \in M$. Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{V}$ von R_0 die durch $\gamma_{\mathfrak{V}} = \gamma | \mathfrak{V}$ konform auf eine komplexe Kurve $V \subseteqq L$ abgebildet wird, die $P_0 = \gamma(R_0)$ enthält und für die $V \cap M = \overline{V} \cap M = \{P_0\}$ gilt. Angenommen $\Sigma_\tau(P_0, V)$ ist nicht leer. Dann gibt es eine Folge $Q^\nu = \tau(P^\nu)$ mit $P^\nu \in V \cap A$, so daß $P^\nu \to P_0$ und $Q^\nu \to Q_0 \in N \cap \tilde{L}$ für $\nu \to \infty$ streben. Da die nichtgewöhnlichen Punkte von L isoliert liegen, kann man $P^\nu \in \hat{L} \cap A$ also $Q^\nu \in \tau(\hat{L} \cap A) = \tilde{A}$ annehmen. Es sei $\tilde{R}^\nu = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1}(Q^\nu)$ und $R^\nu = \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P^\nu)$. Da $\lim_{\nu \to \infty} \tilde{\gamma}(\tilde{R}^\nu) = Q_0$ ist, gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge, so daß $\tilde{R}^\nu \to \tilde{R}_0 \in \tilde{\mathfrak{L}}$ strebt. Für $\nu \to \infty$ streben $R^\nu = \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P^\nu) \to \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P_0) = R_0$ und $\varphi(R^\nu) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1} \tau \gamma_{\mathfrak{A}}(R^\nu) = \tilde{R}^\nu \to \tilde{R}_0 \in \tilde{\mathfrak{L}}$. Also ist $\tilde{R}_0 \in \Sigma_\varphi(R_0)$, was unmöglich ist. Die Streumenge $\Sigma_\tau(\gamma(R_0), V)$ ist leer. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

3. Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subseteqq L$, ist $\mathfrak{V} \subseteqq \mathfrak{L}$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}$, ist $\gamma_{\mathfrak{V}}$ die konforme Beschränkung von γ auf $\mathfrak{V}$ und ist in jedem Punkt $P \in V \cap M$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P, V) \neq \varnothing$, so ist nach Behauptung 2 die offene Menge $\mathfrak{V}$ in $\varrho(\tilde{\mathfrak{L}})$ enthalten. Also wird V durch $\varrho^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ konform in $\tilde{\mathfrak{L}}$ abgebildet. Die dritte Behauptung ist bewiesen.

4. Besteht unter den in 3. genannten Voraussetzungen die Menge $M \cap V = M \cap \overline{V}$ nur aus einem einzigen Punkt P_0, so wird V durch $\varrho^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ auf eine offene Menge $\tilde{\mathfrak{V}}$ in $\tilde{\mathfrak{L}}$ konform abgebildet. Dabei ist $\tilde{\mathfrak{V}} - \{\varrho^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P_0)\} \subseteqq \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B)$. Es ist $\tilde{\gamma} \varrho^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ auf V stetig und $\tilde{\gamma} \varrho^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P) = \tau(P)$ für $P \in V - \{P_0\}$. Daher verhält sich die Abbildung $\tau(P)$ längs V in P_0 bestimmt. Es sei $\tau(V, V) = \tilde{V}$. Wegen $\overline{V} - V \subseteqq A$ ist $\tilde{V} = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}} \varrho^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(V) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}(\tilde{\mathfrak{V}})$. Da $\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ die offene Teilmenge $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteqq \tilde{\mathfrak{L}}$ eineindeutig in $\tilde{L}$ abbildet, da es zu jedem Punkt aus $\tilde{\mathfrak{V}}$ eine offene Umgebung gibt, die durch $\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ konform auf eine komplexe Kurve aus H abgebildet wird, da $\overline{V} - \{Q_0\}$ eine komplexe Kurve aus H ist, und da für jede Folge $R^\nu \in \mathfrak{V}$, die in $\mathfrak{V}$ keinen Häufungspunkt hat, die Folge $\tilde{\gamma}(R^\nu)$ wegen $\overline{V} - V \subseteqq A$ in $\tilde{V}$ keinen Häufungspunkt hat, ist $\tilde{V}$ eine komplexe Kurve aus H, für die $\overline{\tilde{V}} \cap N = \tilde{V} \cap N = \{Q_0\}$ gilt.

Ist P_0 ein gewöhnlicher Punkt von V und streut $v(Q)$ in Q_0 nicht, so ist $v(Q, H)$ in Q_0 gemäß Satz 2.9 analytisch und es gibt eine uniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ mit $P_0 \in U_\alpha$, für die $\alpha^{-1}(U_\alpha \cap V) = \{\mathfrak{z} | \mathfrak{z} = (z_1, 0, \ldots, 0)\} \cap U_\alpha'$ ist. Eine uniformisierende Abbildung $\beta \in \mathfrak{P}(H)$ werde gewählt, wobei $\beta(0) = Q_0 \in U_\beta$ sei. In einer Umgebung des Nullpunktes werden durch

$$\alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}), H) = (f_1(\mathfrak{w}), \ldots, f_n(\mathfrak{w})) \tag{3.7}$$

analytische Funktionen f_ν definiert. In einer Umgebung des Nullpunktes hat $\beta^{-1}(\tilde{V})$ eine analytische Parameterdarstellung $\mathfrak{w}(u)$, wobei $\mathfrak{w}(0) = 0$ sei. Die Abbildung

$$z_1 = f_1(\mathfrak{w}(u)) = \alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}(u)), H) = \alpha^{-1} \gamma_{\mathfrak{V}} \varrho \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}^{-1}(\mathfrak{w}(u)) \tag{3.8}$$

ist in einer Umgebung des Nullpunktes konform. Also ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{1 w_\nu}(0)\, w_\nu'(0) = \frac{d}{du} f_1(\mathfrak{w}(u)) \Big|_{u=0} \neq 0. \tag{3.9}$$

Daher ist $\mathfrak{w}'(0) \neq 0$ und somit Q_0 ein gewöhnlicher Punkt von $\tilde{V}$, womit die vierte Behauptung bewiesen ist.

5. Es ist

$$\tilde{L} = \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{L}}) = \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{A}}) \cup \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{R}}) = \tilde{\gamma}\,\varrho(\mathfrak{A}) \cup \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{R}}) = \tilde{A} \cup \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{R}}), \tag{3.10}$$

$$\tilde{L} \cap N = N \cap \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{R}}). \tag{3.11}$$

Da $\mathfrak{M}\begin{pmatrix}\mathfrak{L}, \mathfrak{A}, \mathfrak{R}, \varphi\\ \tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{R}}, \psi\end{pmatrix}$ eine Modifikation ist, besteht $\tilde{\mathfrak{R}}$ und damit auch $\tilde{L} \cap N$ nur aus isolierten Punkten. Da $\tilde{L}$ eine rein zweidimensionale analytische Menge ist, ergibt sich

$$\tilde{L} = \overline{\tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{A}})} = \overline{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}_{\mathfrak{A}}^{-1}\tau\gamma_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})} = \overline{\tau(\tilde{L} \cap A)} = \overline{\tau(L \cap A)}, \tag{3.12}$$

w. z. b. w.

Nun soll das Verhalten komplexer Kurven bei offenen Modifikationen untersucht werden.

Satz 3.5. Verhalten komplexer Kurven.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ *sei offen. Die komplexe Kurve* L *aus* G *schneide* M *in genau einem Punkt* P_0. *Es sei* $L \cap M = \overline{L} \cap M$. *Die Streumenge* $\Sigma(P_0, L)$ *sei nicht leer. Es gebe eine offene Umgebung* U *von* M *und eine in* $V = \tau(U \cap A) \cup N$ *analytische Menge* $\tilde{L}$, *die rein zweidimensional ist und* $\tau(U \cap A \cap L)$ *umfaßt.*

Behauptung. 1. *Die Abbildung* τ *verhält sich längs* L *in* P_0 *bestimmt, d.h.,* $\Sigma(P_0, L)$ *besteht aus einem einzigen Punkt* Q_0. *Es ist* $L^* = \tau(L, L) = \tau(L \cap A) \cup \{Q_0\}$ *eine komplexe Kurve aus* H, *für die* $\overline{L^*} \cap N = L^* \cap N = \{Q_0\}$ *gilt.*

2. *Ist* P_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* L *und streut die Abbildung* v *in* P_0 *nicht, so ist auch* Q_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* L^*.

Beweis. 1. Da P_0 der einzige Punkt von $\overline{L} \cap M$ ist, gibt es zu jedem Punkt $P \neq P_0$ aus M eine offene Umgebung $U_P \subset U$, die L nicht trifft. Der Punkt P_0 hat eine offene Umgebung $U_{P_0} \subseteq U$, so daß $U_{P_0} \cap L$ eine analytische Menge aus U_{P_0} ist. Dann ist $U_{P_0} \cap L$ eine rein zweidimensionale analytische Menge aus der offenen Umgebung $U_1 = \bigcup_{P \in M} U_P$ von M. Die Menge $V_1 = \tau(U_1 \cap A) \cup N \subseteq V$ ist offen und enthält die rein zweidimensionale analytische Menge $V_1 \cap \tilde{L} \supseteq \tau(U_1 \cap A \cap L)$. Dann gibt es eine minimal gewählte, zweidimensionale analytische Menge $\widetilde{L^*}$ aus V_1, die $\tau(U_1 \cap A \cap L)$ umfaßt. Es ist $\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}U_1, A \cap U_1, M, \tau\\ V_1, B \cap V_1, N, v\end{pmatrix}$ eine offene Modifikation. Nach Satz 3.4 wird $U_1 \cap L$ auf eine komplexe Kurve L_1 aus V_1 durch $\tau(P, U_1 \cap L)$ abgebildet. Wegen $\overline{L} - L \subset A$ gilt $\tau(P, U_1 \cap L) = \tau(P, L)$ für $P \in L \cap U_1$ und $L^* = \tau(L, L) = \tau(U_1 \cap L, L) \cup \tau(L \cap A)$. Daher ist L^* eine komplexe Kurve aus H. Es besteht $\Sigma(P_0, U_1 \cap L) = \Sigma(P_0, L)$ aus genau einem Punkt $Q_0 \in L^* \cap N$. Man erhält

$$\begin{cases} \overline{L^*} \cap N = [\overline{\tau(U_1 \cap L, L)} \cap N] \cup [\overline{\tau(L - U_1)} \cap N] \\ \qquad = \overline{\tau(U_1 \cap L, L)} \cap N = \{Q_0\}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Daher ist $\overline{L^*} \cap N = L^* \cap N = \{Q_0\}$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.4.

Bei den bisherigen Sätzen über das Verhalten einer analytischen Menge L der reinen Dimension 2 bzw. einer komplexen Kurve L war immer $\tau(L \cap A)$ in eine zweidimensionale analytische Menge eingebettet. Nun soll etwas über das Verhalten von $\tau(L \cap A)$ ausgesagt werden, wenn man etwas über das Verhalten der Abbildung τ längs L in M weiß.

Satz 3.6. Das Verhalten komplexer Kurven.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die komplexe Kurve* L *aus* G *verhalte sich im Punkt* $P_0 \in L \cap M$ *bestimmt. Es gelte* $L \cap M = \overline{L} \cap M$ *und diese Menge bestehe nur aus dem einzigen Punkt* P_0.

Behauptung. 1. *Durch* $\tau(P, L)$ *wird* L *konform auf die komplexe Kurve* $\widetilde{L} = \tau(L, L)$ *aus* H *abgebildet, wobei* $\overline{\widetilde{L}} \cap N = \widetilde{L} \cap N$ *ist und diese Menge aus dem einzigen Punkt* $Q_0 = \tau(P_0, L)$ *besteht.*

2. *Ist* P_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* L *und streut die Abbildung* v *in* Q_0 *nicht, so ist auch* Q_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* $\widetilde{L}$.

Beweis. Wie zu Beginn des Beweises zu Satz 3.5 konstruiert man (mit $U = G$) eine offene Umgebung U_1 von M, so daß $U_1 \cap L$ eine analytische Menge aus U_1 ist. Dann ist $\tau(U_1 \cap L \cap A)$ eine analytische Menge in $\tau(U_1 \cap A)$, die nach Satz 2.12 in $V = \tau(U_1 \cap A) \cup N$ regulär ist. Durch $\overline{\tau(U_1 \cap L \cap A)} \cap V$ wird eine analytische Menge der reinen Dimension 2 gegeben, die $\tau(U_1 \cap L \cap A) \cap V$ umfaßt. Die Voraussetzungen und damit auch die Behauptungen von Satz 3.5 sind erfüllt, w. z. b. w.

Zusatz *zu Satz* 3.6.

Ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ *nicht offen, aber* $\overline{L}$ *kompakt, so gilt auch die erste Behauptung von Satz* 3.6.

Beweis. Es ist $L^* = \tau(L \cap A)$ eine komplexe Kurve aus B. Die Mengen $\overline{L} - L$ und $\tau(\overline{L} - L)$ sind kompakt. Also ist $V = H - \tau(\overline{L} - L)$ eine offene Umgebung von N. Da L eine rein zweidimensionale analytische Menge aus $W = G - (\overline{L} - L)$ ist, erhält man mit L^* eine rein zweidimensionale analytische Menge aus $V \cap B$; es ist also $\overline{L^*} \cap V \cap B = L^* \cap V \cap B$. Ist $Q_1 \in \overline{L^*} \cap N$, so strebt eine Folge $Q^\nu = \tau(P^\nu) \to Q_1$ für $\nu \to \infty$, wobei $P^\nu \in L \cap A$ ist. Die Folge P^ν hat einen Häufungspunkt in $\overline{L}$; jeder Häufungspunkt von P^ν gehört zu $\Sigma_v(Q_1, \overline{L^*}) \subset M$. Daher streben $P^\nu \to P_0$ und $Q^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$, wobei $Q_0 = Q_1$ der einzige Punkt von $\Sigma_\tau(P_0, L)$ ist. Die analytische Menge L^* ist innerhalb V höchstens in Q_0 singulär, also in V regulär. Es ist $\overline{L^*} \cap V = \widetilde{L}$ eine rein zweidimensionale analytische Menge aus V mit $\widetilde{L} = \tau(L \cap A) \cup \{Q_0\} = \tau(L, L)$. Man erhält

$$Q_0 \in \overline{\widetilde{L}} \cap N \subseteq \overline{L^*} \cap N = \overline{L^*} \cap V \cap N = \widetilde{L} \cap N = \{Q_0\}, \tag{3.13}$$

womit sich $\overline{\widetilde{L}} \cap N = \widetilde{L} \cap N = \{Q_0\}$ ergibt.

Es sei $C \subsetneqq \tilde{L}$ eine komplexe Kurve durch Q_0 mit $C \cap N = \overline{C} \cap N = \{Q_0\}$. Es sei $\overline{C}$ kompakt. Es besteht $\Sigma_v(Q_0, C)$ aus dem einen Punkt P_0. Es wird C durch $v(Q, C)$ eineindeutig auf $\tilde{C} = v(C, C) = v(C) \cup \{P_0\}$ abgebildet. Die Abbildung $v(Q, C)$ ist als Abbildung in die komplexe Mannigfaltigkeit L für $Q \in C$ mit $Q \neq Q_0$ konform und in Q_0 stetig, also ist sie auch in Q_0 konform. Ist also C_1 eine zweite solche komplexe Kurve durch Q_0, so stimmen $v(C_1, C_1)$ und $\tilde{C}$, also auch C_1 und C, in einer Umgebung von P_0 bzw. Q_0 überein. Daher ist $\tilde{L}$ eine komplexe Kurve aus H, w. z. b. w.

Die Bedingung $L \cap M = \overline{L} \cap M$ kann in den beiden vorhergehenden Sätzen nicht wegbleiben. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Es sei G der vierdimensionale komplexprojektive Raum mit den homogenen Koordinaten $z_0 : z_1 : z_2$ und H der vierdimensionale komplexprojektive Raum mit den homogenen Koordinaten $w_0 : w_1 : w_2$. Ferner seien

$$A = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_0 z_1 z_2 \neq 0\}, \qquad M = G - A, \tag{3.14}$$

$$B = \{(w_0 : w_1 : w_2) \mid w_0 w_1 w_2 \neq 0\}, \quad N = H - B, \tag{3.15}$$

$$\tau(z_0 : z_1 : z_2) = (z_0 z_1 : z_1 z_2 : z_2 z_0), \tag{3.16}$$

$$v(w_0 : w_1 : w_2) = (w_0 w_2 : w_0 w_1 : w_1 w_2). \tag{3.17}$$

Es ist $\mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation. Die komplexe Kurve L sei die Punktmenge, für die

$$\begin{cases} z_2 z_0 = z_1^2 - 3 z_1 z_0 + 2 z_0^2 = (z_1 - 2 z_0)(z_1 - z_0), \\ |z_2| < \frac{1}{2}|z_0|, \quad \frac{1}{2}|z_0| < |z_1| < \frac{5}{2}|z_0|, \quad (z_0 : z_1 : z_2) \neq (1 : 1 : 0) \end{cases} \tag{3.18}$$

gilt. Sie schneidet M nur im Punkt $P_0 = (1 : 2 : 0)$, aber es ist $L \cap M \neq \overline{L} \cap M$, wie man sofort sieht. Die komplexe Kurve L ist zusammenhängend. Die Abbildung τ verhält sich längs L in P_0 bestimmt und $\tau(L \cap A)$ liegt in der rein zweidimensionalen analytischen Menge

$$L_0 = \{(w_0 : w_1 : w_2) \mid w_1 w_2^2 = w_0 w_1^2 - 3 w_0 w_1 w_2 + 2 w_2^2 w_0\}. \tag{3.19}$$

Die Streumenge $\Sigma_\tau(P_0, L)$ besteht aus dem einzigen Punkt $Q_0 = (1 : 0 : 0)$. Setzt man

$$V = [\{(w_0, w_1 : w_2) \mid |w_1| < \tfrac{1}{2}|w_0|, \ \tfrac{1}{2}|w_2| < |w_1| < \tfrac{5}{2}|w_2|\} \cup \{(1 : 0 : 0)\}], \tag{3.20}$$

so ist $\tilde{L} = \tau(L, L) = V \cap L_0$ und es wird $\tilde{L}$ in einer Umgebung U des Nullpunktes durch $L_0 \cap U$ gegeben. Also ist $\tilde{L}$ keine komplexe Kurve aus H; denn $\tilde{L} = \tau(L, L)$ hat im Punkt Q_0 einen Doppelpunkt.

Literatur.

[0] Alexandroff, P.: Über die Struktur der bikompakten topologischen Räumen. Math. Ann. **92**, 267—274 (1923). — [1] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). —

[2] CALABI, E., u. M. ROSENLICHT: Complex analytic manifolds without countable base. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 335—340 (1952). — [3] CARTAN, H.: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **61**, 149—197 (1944). Appendice II. — [4] CARTAN, H.: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. **125**, 49—50 (1952). — [5] HERMES, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen. Math. Ann. **120**, 539—562 (1947). — [6] HIRZEBRUCH, F.: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **124**, 77—86 (1951). — [7] HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126**, 1—22 (1953). — [8] HIRZEBRUCH, F.: Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. J. f. Math. **191**, 110—124 (1953). — [9] HOPF, H.: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. appl., Ser. V **10**, 169—182 (1951). (Vortrag Rom 1950.) — [9a] HOPF, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in den Comm. Math. Helv. — [10] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. **4**, 382—391 (1950). — [11] KNESER, H.: Abzählbarkeit und analytische Struktur bei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in den Math. Ann. — [12] RADÓ, T.: Über eine nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. **20**, 1—6 (1924). — [13] RADÓ, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Szeged **2**, 101—121 (1925). — [14] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [15] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. **126**, 221—238 (1953). — [16] STOLL, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **57**, 116—154 (1952). — [17] STOLL, W.: Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. I. Acta mathematica **90**, 1—115 (1953). — [18] STOLL, W.: Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen. Math. Z. **60**, 287—304 (1954). — [19] THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137—157 (1934). — [20] ZARISKI, O.: Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties. Ann. of Math. **45**, 472—542 (1954). § 24.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 9. August 1954.)

MAY CIRCULATE

Die Unsachlichkeit der Existenzphilosophie

Vier kritische Aufsätze. Von Professor Dr. **Kurt Reidemeister,** Direktor des Mathematischen Seminars der Universität Marburg a. d. Lahn. IV, 40 Seiten Gr.-8°. 1954.
Englische Broschur DM 4.80

Inhaltsübersicht: Über den Ursprung der Theologie Bultmanns. — Positivismus und Existenzphilosophie. — Die Einheit des Denkens in Philosophie und Wissenschaft. — Über den Begriff der Spekulation.

Die folgenden vier Aufsätze sind der kritischen Darstellung einiger Grundgedanken der Existenzphilosophie gewidmet. Der erste Aufsatz zeigt die Grenze des existenziellen Verstehens in einer konkreten theologischen Situation auf. Der zweite Aufsatz schildert die systematische Bedeutung des Sprunges in der Existenzphilosophie als eine unbegründete Ablehnung a priori des Positivismus. Der dritte Aufsatz sucht den Gegensatz zwischen Positivismus und Existenzphilosophie zu besserem Verständnis von innen her durch Einbettung in den Gegensatz zwischen positivem und hermeneutischem Verstehen zu bringen. Im vierten Aufsatz wird der spekulative Charakter des existenziellen Denkens an einem Beispiel aufgehellt.

Verf. hofft, daß diese Darstellung einer sachlichen Auseinandersetzung den Weg ebnet. Ein festumrissener Standpunkt für eine solche Auseinandersetzung wurde in dem anderen Werk des Verfassers „Geist und Wirklichkeit" entwickelt.

Geist und Wirklichkeit

Kritische Essays. Von Professor Dr. **Kurt Reidemeister,** Direktor des Mathematischen Seminars der Universität Marburg a. d. Lahn. III, 92 Seiten Gr.-8°. 1953.
Englische Broschur DM 8.60

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — **Essays.** Mensch und Wirklichkeit. Die Unverständlichkeit der Mathematik. Vom Sinn der Zeichen. Anschauung als Erkenntnisquelle. Raum und Erfahrung. Appell im Elend. Die gnostische Umwälzung. Der Narr als Karikatur der Vernunft. Über Formenschönheit. — **Prolegomena einer kritischen Philosophie.** Der Sprung als Gepflogenheit. Die Selbständigkeit des Denkens. Erfahrung und Erleuchtung. Die Wirklichkeit des Faktischen. Das erscheinende Schöne. Vernünftige Erfahrung. Schluß.

Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität

Von Professor Dr. **George Jaffé,** Department of Physics, Louisiana State University, Louisiana. 211 Seiten Gr.-8°. 1954. Steif geheftet DM 9.60

Mit diesen drei Dialogen macht der Verfasser nicht allein den Physikern, sondern der ganzen Welt der Gebildeten ein Geschenk. Alle drei behandeln Problemkreise der Physik, die in den letzten Jahrzehnten zu verschiedenen Zeiten weite Kreise erregt haben, und zwar die beiden ersten die nichteuklidische Geometrie und Relativitätstheorie — sie sind schon früher veröffentlicht worden —, der letzte das Problem der Kausalität (Determinismus — Indeterminismus). Dieser dritte Dialog, an Umfang so groß wie die beiden ersten zusammen, wird heute, in einer Zeit der Gemeinschaftstagungen von Physikern, Philosophen, Theologen, auf ganz besonderes Interesse stoßen. Es sei nur an die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation erinnert und die philosophischen Konsequenzen, die daraus zu ziehen oder nicht zu ziehen sind. Die Meisterschaft des Verfassers erweist sich darin, wie er in klarer, einfacher Sprache den Inhalt einer physikalischen Theorie ohne mathematische Formeln entwickelt und wie im Zwiegespräch mit dem philosophischen Freund die Grenzen der beiderseitigen Zuständigkeit abgesteckt werden und eine einigende Formel gefunden wird. Ist der Ausgangspunkt ein physikalischer (der Verfasser ist theoretischer Physiker), so ist die Methode doch eher erkenntnistheoretisch, und das eigentliche Anliegen ein solches der Metaphysik. Die Form des platonischen Dialogs ist der Darstellung angemessen, die Sprache ist bildhaft und edel, und so bereitet die Lektüre des kurzen Werkes jedem Gebildeten einen hohen Genuß. Dazu kommt, daß der Verfasser zu den im Gang befindlichen Diskussionen Entscheidendes zu sagen hat.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

NLM 4 IN STACKS

Einführung in die Atomphysik

Von Professor Dr. **Wolfgang Finkelnburg**, Erlangen. Dritte, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 266 Abbildungen. XI, 543 Seiten Gr.-8°. 1954.

Ganzleinen DM 44.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen. — Atomspektren und Atombau. — Die quantenmechanische Atomtheorie. — Die Physik der Atomkerne. — Physik der Moleküle. — Festkörper-Atomphysik. — Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen. — Sachverzeichnis.

Nach der überaus freundlichen Aufnahme, die das Buch bisher gefunden hat, scheint es seinen Zweck zu erfüllen, den gesamten Erscheinungskomplex der Atomphysik in anschaulicher und verständlicher, dabei aber wissenschaftlich einwandfreier Darstellung den Studenten wie den schon in der Praxis tätigen Physikern, Chemikern, Ingenieuren und sonstigen Interessenten nahezubringen. Um das Buch trotz des stürmischen Tempos der atomphysikalischen Forschung, das sich in der Kernphysik, der Höhenstrahlphysik und der Festkörperphysik in den letzten Jahren noch verschärft hat, auf dem neuesten Stand unserer Kenntnis zu halten, wurde es unter Beibehaltung der sich offenbar bewährenden Art der Darstellung noch einmal vollständig überarbeitet. Dabei erwies es sich als unumgänglich, die Kernphysik und die Festkörper-Atomphysik erneut völlig umzuschreiben und diesen Gebieten entsprechend ihrer zunehmenden Bedeutung einen Raum zu widmen, der dem der Atomhüllenphysik vergleichbar ist. Auch in den übrigen Kapiteln wurde die Darstellung klarer gefaßt und in vielen Einzelheiten ergänzt und korrigiert.

MAY CIRCULATE

Aus den Besprechungen zur zweiten Auflage

Unter der umfangreichen Nachkriegsliteratur gibt es wohl nur wenige Bücher, die derart eingeschlagen haben wie die Finkelnburgsche „Atomphysik". ... Möge es dem Verfasser gelingen, sein Werk auch in den weiteren Auflagen in der gleichen so gut verständlichen Art ... stets auf dem modernsten Stand der Forschung zu halten.

„Die Naturwissenschaften"

Die Atomphysik ist längst nicht mehr Angelegenheit einiger theoretischer Physiker; allzutief greift sie bereits in alle Gebiete der Technik ein, als daß ein Physiker, welcher Richtung auch immer, auf einen Überblick über den ins riesenhaf tegewachsenen Stoff verzichten könnte. ... So mußte ein Buch wie das FINKELNBURGsche über kurz oder lang geschrieben werden. Daß der Verfasser das Richtige traf beweist der Umstand, daß die 1. Auflage bereits nach weniger als drei Jahren vergriffen und eine Neuauflage erforderlich war. ... So kann man Verfasser und Verlag zu dieser Schau der gesamten Atomphysik beglückwünschen.

„Zeitschrift für angewandte Physik"

Die Einführung in die Atomphysik von W. Finkelnburg hat sich dank ihrer reichhaltigen und dabei präzisen und klaren Darstellung der modernen Atomistik einen führenden Platz unter den Büchern dieser Art errungen. ...

„Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung"

The book has to be recommended very highly in every respect. *„Review of Scientific Instruments"*

The autor should be congratulated on a splendid job. *„Proceedings of the Institute of Radio Engineers"*

This book provides an excellent survey of atomic physics. ... It deserves to be read widely by those seeking an overview of this fascinating field. *„Journal of Chemical Education"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.